A.R. McLeod.

THÉORIE

DES

TOURBILLONS

TOURS. -- IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS
PUBLIÉS PAR L'ASSOCIATION AMICALE DES ÉLÈVES ET ANCIENS ÉLÈVES
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

THÉORIE
DES
TOURBILLONS

Leçons professées pendant le deuxième semestre 1891-92

PAR

H. POINCARÉ, MEMBRE DE L'INSTITUT

Rédigées par **M. LAMOTTE,** licencié ès-sciences

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

INTRODUCTION

La théorie des mouvements tourbillonnaires repose sur un théorème dû à Helmholtz et qui constitue le plus grand progrès qu'aient fait jusqu'aujourd'hui les théories hydrodynamiques.

En toute rigueur, ce théorème ne s'applique qu'aux mouvements des fluides dans lesquels il n'existe aucun frottement, et qui présentent une température uniforme ou dépendant seulement de la pression. Lorsque ces conditions ne sont pas exactement remplies, mais que les conditions réelles en diffèrent très peu, on peut encore appliquer le théorème en considérant les résultats obtenus, non plus comme rigoureusement exacts, mais comme représentant seulement une première approximation.

Les mouvements tourbillonnaires paraissent jouer un rôle considérable dans les phénomènes météorologiques, rôle que Helmholtz a tenté de préciser.

On a tenté aussi de trouver, dans l'existence de pareils mouvements tourbillonnaires, l'explication mécanique de l'univers. Au lieu de se représenter l'espace occupé par des atomes que séparent des distances immenses vis-à-vis de leurs propres dimensions, sir William Thomson admet que la matière est continue, mais que certaines portions sont animées de mouvements tourbillonnaires, qui, d'après le théorème de Helmholtz, doivent conserver leur individualité.

Enfin les équations qui servent à définir les mouvements tourbillonnaires présentent une certaine analogie de forme avec les équations de l'électrodynamique : ceci conduit naturellement à rapprocher les deux théories, et a permis dans certains cas de déduire d'un problème résolu dans l'une des théories la solution d'un problème posé dans l'autre. De plus, un certain nombre de tentatives ont été faites pour établir un lien plus étroit entre elles.

Après avoir rappelé les équations de l'hydrodynamique, je démontrerai le théorème de Helmholtz et je développerai ses conséquences relatives au mouvement des fluides, en comparant les résultats à ceux de l'électrodynamique.

CHAPITRE PREMIER

THÉORÈME DE HELMHOLTZ

1. Equations de l'hydrodynamique. — Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'une molécule de fluide à l'origine des temps $t = 0$; x, y, z ses coordonnées au temps t ; u, v, w les composantes de sa vitesse ; ρ la densité du fluide, p sa pression.

On peut prendre comme variables x_0, y_0, z_0, t, c'est le système de Lagrange, ou x, y, z, t, c'est le système d'Euler. Dans ce qui suivra, j'adopterai les notations suivantes ; je désignerai par :

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{du}{dx_0}, \quad \frac{du}{dy_0}, \quad \frac{du}{dz_0},$$

les dérivées prises par rapport aux variables de Lagrange, et par :

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

les dérivées prises par rapport aux variables d'Euler.

Dans le système de Lagrange, x, y, z sont fonctions de x_0, y_0, z_0, t.

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dr}{dt} = w$$

sont les composantes de la vitesse ;

$$\frac{du}{dt}, \qquad \frac{dv}{dt}, \qquad \frac{dw}{dt},$$

celles de l'accélération.

Pour passer d'un système de variables à l'autre, il suffit d'appliquer les règles ordinaires de la différentiation, et d'écrire :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

ou

$$(1) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Et de même :

$$(2) \qquad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Soit un élément de volume $d\tau$: la masse de liquide qu'il renferme est $\rho d\tau$. J'appellerai $\rho X d\tau$, $\rho Y d\tau$, $\rho Z d\tau$ les projections sur les axes de la résultante de toutes les forces qui agissent sur cet élément. Les équations de l'hydrostatique, exprimant que cet élément est en équilibre, sont les suivantes :

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho X \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho Y \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho Z \end{aligned}$$

Pour passer de ces équations à celles de l'hydrodynamique, il faut ajouter aux forces réelles les forces fictives d'inertie (principe de d'Alembert). Les composantes de ces forces d'inertie sont respectivement égales aux composantes de l'accélération multipliées par la masse et changées de signe: soient :

$$-\rho d\tau.\frac{du}{dt}, \qquad -\rho d\tau\frac{dv}{dt}, \qquad -\rho d\tau.\frac{dw}{dt}.$$

Les équations de l'hydrodynamique seront donc :

1° Dans le système de Lagrange :

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\rho \partial x} &= X - \frac{du}{dt} \\ \frac{\partial p}{\rho \partial y} &= Y - \frac{dv}{dt} \\ \frac{\partial p}{\rho \partial z} &= Z - \frac{dw}{dt}; \end{aligned}$$

2° Dans le système d'Euler :

$$(5) \qquad \frac{\partial p}{\rho \partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z}, \text{ etc.}$$

2. Dans tout ce qui suivra, je supposerai que x, y, z soient des fonctions continues de x_0, y_0, z_0. Cette condition n'est pas toujours satisfaite. Soient en effet deux réservoirs remplis de liquide, séparés par une paroi percée d'une ouverture, et dans l'un desquels règne une pression élevée. Il se produira une veine liquide en dehors de laquelle le liquide demeurera immobile, tandis qu'à l'intérieur de la veine il prendra un mouvement uniforme. Supposons que la veine ait la forme d'un cylindre parallèle à l'axe des x.

A l'extérieur du cylindre, nous aurons :

$$x = x_0 \qquad y = y_0 \qquad z = z_0;$$

à l'intérieur :

$$x = x_0 + vt \qquad y = y_0 \qquad z = z_0.$$

x est donc une fonction discontinue de x_0, y_0, z_0.

Si x, y, z sont des fonctions continues de x_0, y_0, z_0, les molécules de liquide qui au temps $t = o$ forment une courbe ou une surface continue formeront encore une courbe ou une surface continue à une époque quelconque t ; si la courbe au temps o est fermée, elle le sera encore au temps t.

En effet, supposons que les molécules dans leurs positions initiales forment un certain arc de courbe. Les équations de cet arc de courbe pourront se mettre sous la forme :

$$x_0 = f_0 (\alpha) \qquad y_0 = f'_0 (\alpha) \qquad z_0 = f'_0 (\alpha)$$

f_0, f'_0, f''_0 étant des fonctions continues du paramètre α.

Au temps t, les coordonnées des molécules deviennent x, y, z, qui, par hypothèse, sont des fonctions continues de x_0, y_0, z_0. Ce seront par conséquent des fonctions continues de α :

$$x = f (\alpha) \qquad y = f' (\alpha) \qquad z = f'' (\alpha)$$

Ces équations représentent encore un arc de courbe continue.

Si la courbe initiale C_0 est fermée, x_0, y_0, z_0 sont des fonctions périodiques de α. Comme x, y, z sont des fonctions uniformes de x, y, z, ce seront aussi des fonctions périodiques de α ; et la courbe C, qu'occupent les molécules à l'époque t, sera également fermée.

Si les molécules, à l'origine des temps, occupent une sur-

face continue S_0, leurs coordonnées pourront s'exprimer par :

$$x_0 = f_0(\alpha, \beta), \qquad y_0 = f_0'(\alpha, \beta), \qquad z_0 = f_0''(\alpha, \beta)$$

f_0, f_0', f_0'' étant des fonctions continues des paramètres (α, β). A l'époque t, les coordonnées deviennent x, y, z, qui sont fonctions continues de x_0, y_0, z_0 et par conséquent de (α, β). Donc :

$$x = f(\alpha, \beta) \qquad y = f'(\alpha, \beta) \qquad z = f''(\alpha, \beta)$$

f, f', f'' étant des fonctions continues ; ces équations représentent encore, par conséquent, une surface S continue.

3. Equation de continuité. — Considérons un élément de surface $d\omega$, et cherchons à évaluer la quantité de fluide qui traverse cet élément pendant le temps dt. Les molécules qui ont traversé l'élément $d\omega$ à l'époque t occupent au temps $t + dt$ un élément de surface $d\omega'$, infiniment voisin de $d\omega$; en particulier, celle qui se trouvait au centre de gravité G de $d\omega$ est venue en G' ; celles qui traversent $d\omega$ à l'époque $t + dt$ occupent cet élément lui-même. Enfin, celles qui ont traversé $d\omega$ entre les deux époques t et $t + dt$ se trouveront dans des positions intermédiaires.

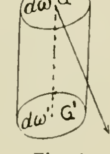


Fig. 1.

En résumé, toutes les molécules qui ont passé par $d\omega$ pendant le temps dt se trouvent à l'instant $t + dt$ dans un volume assimilable à un cylindre ayant pour base l'élément $d\omega$, et dont les génératrices sont parallèles à GG' (*fig.* 1). D'ailleurs $GG' = Vdt$, V étant la vitesse du fluide à l'instant considéré. La hauteur de ce cylindre est la projection de GG' sur la normale à $d\omega$; soit :

$$Vdt.\cos(G'GN) = V_n dt.$$

La quantité de fluide qui a traversé $d\omega$ pendant le temps dt est donc :

$$\rho V_n d\omega . dt.$$

Considérons maintenant un parallélipipède rectangle, dont les arêtes sont respectivement parallèles aux axes de coordonnées et égales à dx, dy, dz (*fig.* 2). D'après ce qui précède, la masse de fluide qui traverse pendant le temps dt la face ABCD perpendiculaire à Ox est égale à :

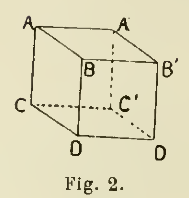


Fig. 2.

$$\rho u dy dz dt\,;$$

celle qui traverse la face opposée :

$$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x}\right) dy dz dt.$$

Il est donc entré dans le parallélipipède, par ces deux faces, une masse de fluide égale à :

$$-\frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz dt.$$

En faisant le même calcul pour les deux autres couples de faces, on trouve que la masse totale du fluide qui est entrée dans le parallélipipède pendant le temps dt est égale à :

$$-\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dx dy dz dt.$$

D'autre part, l'accroissement de la masse $\rho dx dy dz$ du fluide contenu dans le parallélipipède pendant le temps dt, est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx dy dz dt,$$

puisque $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$ représente l'accroissement de la densité ρ pendant le temps dt.

Donc il faut que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \; ; \tag{6}$$

c'est l'équation de continuité dans le système d'Euler. Elle peut s'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \Sigma \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \Sigma u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \; ;$$

ou en tenant compte de la relation (2)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \Sigma \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Seulement, sous cette dernière forme, elle renferme les deux espèces de dérivées.

4. Simplification des équations de Lagrange. — Les équations de Lagrange sont susceptibles de se simplifier, quand on fait les hypothèses nécessaires, comme nous le verrons, pour l'application du principe de Helmholtz.

Dans ce cas, les forces X, Y, Z admettent un potentiel V :

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Quel que soit le fluide, la densité ρ, la pression p et la température T sont liées par une relation, telle que :

$$\rho = f(p, T).$$

Pour que le théorème soit applicable, il faut que ρ soit fonc-

tion de p seulement : ce qui arrivera s'il s'agit d'un liquide unique ou d'un gaz obéissant à la loi de Mariotte dont la température est uniforme ($\rho = p$), ou d'un gaz qui subit une transformation adiabatique ($\rho = p^\gamma$). Si la température n'est pas uniforme, il faut que les surfaces d'égale pression coïncident avec les surfaces d'égale température. S'il y a deux liquides superposés, il faut que la pression soit constante sur la surface de séparation, pour qu'on ait le droit d'appliquer le théorème.

Quand ρ est une fonction de p, $\frac{dp}{\rho}$ est une différentielle exacte, et

$$\int \frac{dp}{\rho}$$

est une fonction de p. Posons

$$V - \int \frac{dp}{\rho} = \psi,$$

et différentions par rapport à x, il vient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial p}{\rho \partial x}.$$

Remplaçons $\frac{\partial p}{\rho \partial x}$ par la valeur tirée de cette relation dans la première équation de Lagrange, il viendra en remarquant que $\frac{\partial V}{\partial x} = X$:

$$(7) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

5. Théorème de Helmholtz. — Considérons une infinité de molécules fluides formant à l'instant $t = 0$ une courbe fermée C_0 ; à l'instant t ces molécules forment une autre courbe fermée C (2). L'intégrale

$$(8) \qquad J = \int (udx + vdy + wdz)$$

prise tout le long de la courbe C est constante.

Ce n'est pas sous cette forme que Helmholtz a donné son théorème, mais sous une forme équivalente, comme nous le verrons plus loin.

Ce théorème renferme, comme cas particulier, celui de Lagrange : s'il existe à l'origine des temps un potentiel des vitesses, il en existe un à une époque quelconque.

En effet, dans ce cas, on a :

$$udx + vdy + wdz = d\varphi,$$

et l'intégrale J est nulle à l'origine du temps. Si elle est constante, elle est toujours nulle, et l'expression sous le signe $\int$ est toujours une différentielle exacte.

6. Démonstration du théorème. — Les équations de la courbe fermée C_0 seront :

$$x_0 = f_0(\alpha) \qquad y_0 = f'_0(\alpha) \qquad z_0 = f''_0(\alpha) ;$$

f_0 ... etc., étant des fonctions continues et périodiques de α. De même, pour la courbe C :

$$x = f(\alpha) \qquad y = f'(\alpha) \qquad z = f''(\alpha).$$

Appelant A la période de α :

$$J = \int_0^A \left(u \frac{dx}{d\alpha} + v \frac{dy}{d\alpha} + w \frac{dz}{d\alpha} \right) d\alpha,$$

Il s'agit de prouver que

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

Or

$$J = \int_0^A \sum u \frac{dx}{d\alpha} d\alpha$$

$$\frac{dJ}{dt} = \int_0^A \sum \frac{du}{dt} \frac{dx}{d\alpha} d\alpha + \int_0^A \sum u \frac{d^2x}{d\alpha dt} d\alpha.$$

Je dis que chacune des sommes Σ est une différentielle exacte.

En effet :

$$\sum \frac{du}{dt} \frac{dx}{d\alpha} d\alpha = \sum \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} d\alpha$$

$$\sum \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{dz}{d\alpha} = \frac{d\psi}{d\alpha},$$

d'où

$$\sum \frac{du}{dt} \frac{dx}{d\alpha} d\alpha = d\psi.$$

D'autre part :

$$u \frac{d^2x}{d\alpha dt} d\alpha = u \frac{du}{d\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} \frac{du^2}{d\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} du^2, \text{ etc.}$$

Par conséquent :

$$\frac{dJ}{dt} = \int \left[d\psi + \frac{1}{2} d\,(u^2 + v^2 + w^2) \right].$$

L'expression sous le signe $\int$ étant une différentielle exacte, l'intégrale prise le long d'une courbe fermée est nulle et

(9) $$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

7. Remarque. — Ce théorème est vrai, à condition que $d\psi$ soit une différentielle exacte, autrement dit que ρ soit fonction de p, et que les forces extérieures admettent un potentiel, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de frottements. On exprime quelquefois cette dernière condition en disant que le théorème est vrai quand il n'y a pas de forces instantanées; cet énoncé est inexact.

8. Théorème de Stokes. — Pour transformer le théorème de Helmholtz, tel que je viens de le démontrer, je ferai usage d'un théorème dû à Stokes, que je vais rappeler.

Soit une courbe fermée C ; faisons passer par cette courbe une surface quelconque : la courbe C limite sur cette surface une certaine aire A. Soient $d\omega$ un élément de cette aire ; l, m, n, les cosinus directeurs de la normale à $d\omega$. D'après le théorème de Stokes, on a :

(10) $$\int_C (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

$$= \int d\omega \left[l \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right) + m \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right) + n \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) \right]$$

la première intégrale étant étendue à tous les éléments de C, la seconde à tous les éléments $d\omega$ de l'aire A.

1° Supposons d'abord que l'aire A soit plane et située dans le plan des (x, y), par exemple. Dans ce cas :

$$l = m = 0 \qquad n = 1 \qquad dz = 0 \qquad d\omega = dxdy,$$

et il reste :

$$\int_{C} udx + vdy = \int dxdy \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right);$$

C'est l'expression d'un théorème d'analyse bien connu. Il en serait de même dans les deux autres plans de coordonnées.

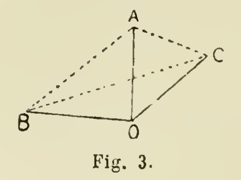


Fig. 3.

2° L'aire A est plane, mais située dans un plan quelconque.

Soient trois longueurs infiniment petites, OA, OB, OC (*fig.* 3) parallèles aux axes ; joignons ABC ; le triangle ABC est plan et infiniment petit. Je dis que le théorème est vrai pour ce triangle. On a évidemment :

$$\int_{ABCA} = \int_{ABOA} + \int_{BCOB} + \int_{CAOC}$$

En effet, les côtés OA, OB, OC sont parcourus deux fois en sens contraire, et il ne reste dans le second membre que les $\int$ prises le long de AB, BC, CA, comme dans le premier membre ; comme les triangles AOB, etc., sont infiniment petits, je puis écrire :

$$\int (udx + vdy + wdz) = \overline{AOB}\left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right) + \overline{AOC}\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right) + \overline{BOC}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right)$$

en appliquant à chacun de ces triangles situés dans les plans de coordonnées l'égalité (1). Or ces triangles ne sont autre chose que les projections de ABC sur ces plans : donc, si

$$\mathrm{ABC} = d\omega,$$
$$\mathrm{AOB} = l d\omega \quad \mathrm{AOC} = m d\omega \quad \mathrm{BOC} = n d\omega$$

et on a bien :

$$\int udx + vdy + wdz = \int l d\omega \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right) + \dots\dots$$

Le théorème est ainsi démontré d'une façon générale, car une aire quelconque peut être décomposée en triangles assez petits pour être assimilés à des triangles plans tels que ABC.

Maxwell a fait un fréquent usage de ce théorème. (Voir son Traité.)

9. Notations de Helmholtz. — Définition du tourbillon. — Helmholtz pose :

$$\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} = 2\xi$$
$$(11) \qquad \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} = 2\eta$$
$$\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = 2\zeta.$$

D'après la formule de Stokes, il vient alors :

$$\int (udx + vdy + wdz) = 2\int d\omega\,(l\xi + m\eta + n\zeta).$$

D'après ce que nous avons établi (6), cette intégrale étendue à l'aire A demeure constante pendant le mouvement de cette aire.

Le vecteur qui a pour composantes (ζ, η, ξ) est ce qu'Helmholtz appelle le *tourbillon*. Cette dénomination demande quelques explications.

Supposons que la courbe C soit une circonférence (*fig.* 4). Par un point M de la courbe menons le vecteur MV qui représente la vitesse ; ses composantes sont (u, v, w). L'expression

$$udx + vdy + wdz$$

représente le produit de l'élément de courbe MM' par la projection de la vitesse sur la direction MM'. Ce produit représente le travail que fournirait une force égale numériquement à la vitesse, quand son point d'application se déplacerait de M en M'. L'intégrale J est égale au travail que produirait cette force si le point M décrivait la circonférence entière.

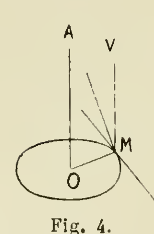


Fig. 4.

Décomposons le vecteur MV en trois autres, l'un parallèle à l'axe OA perpendiculaire au plan du cercle, le deuxième dirigé suivant la tangente au cercle en M, et enfin le troisième suivant le rayon vecteur OM. La composante tangentielle produira seul un travail. Désignons par R le rayon du cercle; nous représenterons cette composante par φR, φ étant une vitesse angulaire. Posons :

$$x = R \cos \omega \quad y = R \sin \omega,$$

et il viendra :

$$J = \int_0^{2\pi} \varphi R^2 d\omega,$$

Soit φ_0 la vitesse angulaire moyenne le long du cercle,

définie par la relation :

$$\int_0^{2\pi} \varphi d\omega = 2\pi\varphi_0.$$

nous aurons :

$$J = 2\pi\varphi_0 R^2.$$

D'autre part, nous savons que, pour obtenir l'élément de l'intégrale J, il faut multiplier l'élément $d\omega$ de l'aire A par deux fois la projection $l\xi + m\eta + n\zeta$ du vecteur (ξ, η, ζ) sur la normale. Cette projection est la composante normale du tourbillon. Si notre cercle est très petit, nous pourrons prendre son aire pour élément $d\omega$, et nous aurons :

$$J = 2\pi R^2. (l\xi + m\eta + n\zeta),$$

par conséquent :

$$\varphi_0 = l\xi + m\eta + n\zeta.$$

φ_0 est la composante normale du tourbillon.

10. Lignes de courant. — En chaque point, nous aurons donc deux vecteurs : la vitesse, qui a pour composantes u, v, w, et le tourbillon dont les composantes sont ξ, η, ζ.

On peut considérer des lignes qui en chacun de leurs points ont comme tangente le vecteur représentant la vitesse, et dont les équations différentielles sont par conséquent :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \tag{12}$$

Ce sont les lignes de courant. Ces lignes ne sont pas nécessairement les trajectoires des molécules. Ce ne serait vrai que dans le cas d'un régime permanent, où la vitesse est constante.

11. Lignes de tourbillon. — On peut aussi considérer les lignes qui en chacun de leurs points sont tangentes au vecteur tourbillon. Leurs équations différentielles sont :

$$(13) \qquad \frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}.$$

Ce sont les lignes de tourbillon. Supposons, par exemple, la vitesse indépendante de z et parallèle au plan des xy : $w = 0$, et les dérivées de u et de v par rapport à z sont nulles. Alors, d'après les équations de définition (11) [9] :

$$\xi = \eta = 0$$

$$\zeta = -\frac{du}{dy}.$$

Les équations des lignes de tourbillon deviennent :

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{\zeta}$$

ou

$$dx = dy = 0.$$

Les lignes de tourbillon sont des droites parallèles à oz.

12. Surfaces de tourbillon. — Une surface de tourbillon est une surface engendrée par des lignes de tourbillon : autrement dit, c'est une surface dont le plan tangent en chaque point passe par le tourbillon. La condition qui exprime qu'une surface $f(x, y, z) = 0$ est une surface de tourbillon sera par suite :

$$(14) \qquad \xi \frac{df}{dx} + \eta \frac{df}{dy} + \zeta \frac{df}{dz} = 0.$$

Considérons un arc de courbe quelconque AB (*fig.* 5), et

par les différents points de cette courbe menons les lignes de tourbillon. Leur ensemble engendrera une surface de tourbillon, qui sera simplement connexe si la courbe AB n'est pas fermée.

Traçons sur cette surface une courbe fermée C limitant une certaine aire α. L'intégrale J prise le long de C est nulle ; en effet :

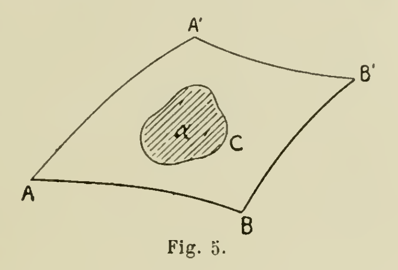


Fig. 5.

$$J_C = \int_\alpha 2d\omega\,(l\xi + m\eta + n\zeta)$$

Or la composante normale du tourbillon $l\xi + m\eta + n\zeta$ est nulle pour tous les éléments $d\omega$ de l'aire α, qui appartient à une surface de tourbillon. Donc $J = 0$.

13. Réciproquement : Si une surface jouit de cette propriété que l'intégrale J étendue à toute courbe fermée, tracée sur cette surface, soit nulle, c'est une surface de tourbillon. En effet :

$$J = \int_\alpha 2d\omega\,(l\xi + m\eta + n\zeta)$$

Pour que cette intégrale soit nulle, quelle que soit l'aire α, il faut que

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0$$

pour tous les éléments de la surface, c'est-à-dire que la composante normale du tourbillon soit nulle. La surface est donc une surface de tourbillon.

14. Supposons qu'à l'époque $t = 0$, nous ayons un certain nombre de molécules occupant une surface de tourbillon. Je dis qu'à une époque t quelconque ces molécules occuperont encore une surface de tourbillon.

En effet, d'après ce qui précède, à l'époque $t = 0$, l'intégrale J est nulle pour la surface occupée par ces molécules. D'après le théorème de Helmholtz, J reste constant. Cette intégrale sera donc nulle à une époque quelconque, et la surface occupée par les molécules à cette époque sera encore une surface de tourbillon.

L'intersection de deux surfaces de tourbillon est une ligne de tourbillon, et, réciproquement, par une ligne de tourbillon, on peut toujours faire passer deux surfaces de tourbillon.

Considérons donc une file de molécules occupant au temps o une ligne de tourbillon C_0. Au temps t cette ligne prend une certaine position C : je dis que C est aussi une ligne de tourbillon.

En effet, faisons passer par C_0 deux surfaces de tourbillon S_0 et S'_0. Au temps t ces deux surfaces deviennent S et S', ayant C pour intersection. D'après ce que nous avons vu, S et S' restent des surfaces de tourbillon : donc leur intersection C est encore une ligne de tourbillon.

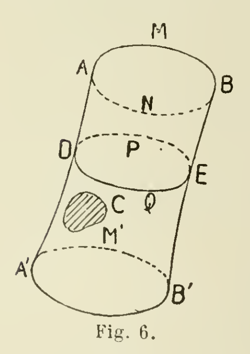


Fig. 6.

15. Tubes de tourbillon. — On appelle tube de tourbillon la surface obtenue en menant par les différents points d'une courbe fermée les lignes de tourbillon (*fig.* 6). Sur une telle surface on peut décrire deux sortes de courbes fermées.

Les courbes C de la première sorte délimitent à elles seules une portion d'aire sur la surface.

Les courbes de la seconde sorte, telles que DPEQ, partagent la surface en deux régions, dont aucune n'est entièrement délimitée par la courbe DPEQ seule. Lorsqu'on développe la surface, les courbes de la première sorte, seules, se développent suivant des courbes fermées.

16. Moment d'un tube de tourbillon. — L'intégrale J prise le long d'une courbe fermée de la première sorte est nulle [**12**]. Mais le raisonnement ne peut plus s'appliquer aux courbes de la seconde sorte, et l'énoncé du théorème doit être modifié de la façon suivante :

L'intégrale J prise le long d'une courbe fermée de deuxième espèce a la même valeur quelle que soit cette courbe.

Soient en effet DPEQ et D'P'E'Q' deux contours fermés : il faut démontrer que :

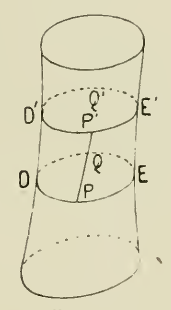


Fig. 7.

$$J_{DPEQ} = J_{D'P'E'Q'}.$$

Prenons un point P sur la première courbe et un point P' sur la seconde, et joignons PP' (*fig.* 7). Le contour

$$PEQDP - PP' - P'D'Q'E'P' - P'P$$

peut être regardé comme un contour fermé de première espèce : donc le long de ce contour J est nul, ou :

$$J_{PEQDP} + J_{PP'} + J_{P'D'Q'E'P'} + J_{P'P} = 0.$$

La seconde et la quatrième intégrales se détruisent, PP'

étant parcouru deux fois en sens contraire. Il reste :

$$J_{PEQDP} + J_{P'D'Q'E'P'} = 0,$$

ou

$$J_{PEQDP} = J_{P'E'Q'D'P'}.$$

L'intégrale J ainsi déterminée s'appelle le moment du tube de tourbillon.

Ce moment reste constant quand les molécules situées sur le tube se déplacent, car nous savons que J reste constant.

17. Application. — Tubes de tourbillon infiniment déliés. — Considérons un tube de tourbillon infiniment délié (*fig.* 8). Menons une section droite de ce tube : c'est une courbe fermée de deuxième espèce. On peut donc calculer le moment du tube en prenant l'intégrale J le long de cette section. Or :

$$J = 2\int d\omega \xi_n,$$

comme nous l'avons vu [9], ξ_n étant la composante normale du tourbillon. Dans le cas actuel

$$J = 2d\omega . \xi,$$

puisque nous n'avons qu'un seul élément, auquel le tourbillon est normal, $d\omega$ est la section droite du tube (section droite que l'on peut toujours supposer parallèle au plan des (yz), et ξ le tourbillon lui-même. On en conclut que :

Le produit de la section droite d'un tube de tourbillon infiniment délié par le tourbillon est constant tout le long du tube. Ce produit demeure aussi constant dans le temps.

Ces deux propositions résultent immédiatement de ce que J est constant dans les mêmes conditions [6]; elles s'appliquent aux liquides et aux gaz, quand existe la fonction que nous avons appelée ψ.

18. Théorèmes relatifs aux liquides seuls. — Soit un tube de force infiniment délié; et soient deux sections droites infiniment voisines de ce tube. Le volume du tube compris entre ces deux sections (*fig.* 8) peut être assimilé à un cylindre ayant pour base l'une d'elles $d\omega$, et pour hauteur MM′, M et M′ étant les points des deux sections situés sur une même ligne de tourbillon. Le volume de ce cylindre sera :

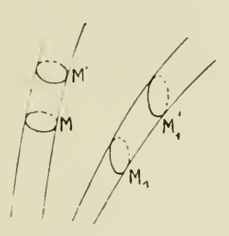


Fig. 8.

$$MM'd\omega.$$

A une autre époque, les molécules qui constituaient ce volume formeront un autre tube de tourbillon; les molécules qui occupaient les deux sections droites occuperont d'autres sections infiniment voisines qui ne seront pas nécessairement des sections droites. Mais le volume, assimilable à un cylindre, qu'elles comprennent entre elles sera

$$M_1M_1' \, d\omega_1,$$

M_1M_1' étant la longueur d'une génératrice, et $d\omega_1$ la section droite.

S'il s'agit d'un liquide, son volume reste constant et :

$$MM'd\omega = M_1M_1' \, d\omega_1$$

Nous avons vu d'ailleurs que $d\omega$ varie en raison inverse du tourbillon. La distance MM′ de deux molécules varie donc proportionnellement au tourbillon. MM′ représente donc en grandeur, direction et sens, le tourbillon multiplié par une certaine constante ε.

Soient x, y, z les coordonnées de M, celles de M′ seront $x + \varepsilon\xi$, $y + \varepsilon\eta$, $z + \varepsilon\zeta$.

Au bout d'un temps infiniment petit dt, les coordonnées de M sont devenues

$$x + udt, \qquad y + vdt, \qquad z + wdt.$$

Celles de M′ :

$$x + \varepsilon\xi + u_1 dt, \qquad \ldots \text{ etc.}$$

Or :

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial \xi}\varepsilon\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta}\varepsilon\eta + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\varepsilon\zeta.$$

Les coordonnées de M′ sont donc devenues :

$$x + \varepsilon\xi\, udt + \varepsilon dt\left(\xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z}\right), \text{ etc.}$$

D'autre part, les projections de MM′ étant égales à $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$, $\varepsilon\zeta$, ces coordonnées sont :

$$x + udt + \varepsilon\left(\xi + \frac{d\xi}{dt}dt\right).$$

En égalant ces deux expressions, il vient :

$$(15) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Cette relation est identique à la suivante

$$(16) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial x} + \zeta\frac{\partial w}{\partial x}.$$

En effet, si nous les retranchons membre à membre :

$$o = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \zeta \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

ou

$$o = -2\eta\zeta + 2\eta\zeta = o.$$

La relation (15) et les deux autres qui s'en déduisent par permutation expriment le théorème de Helmholtz, mais dans le cas des liquides exclusivement.

19. Autres démonstrations du théorème de Helmholtz. — 1° *Démonstration de Helmholtz.* — Helmholtz cherche à obtenir les équations sous la dernière forme (15), que nous venons de leur donner, en partant des équations d'Euler.

Nous avons écrit [4] les équations de Lagrange :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \text{etc.}$$

sous une forme qui contient encore les variables de Lagrange et celles d'Euler. Pour ne laisser que les dernières, faisons la transformation :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \text{etc.}$$

nous obtiendrons :

$$(17) \quad \begin{cases} (1) \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} - w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\ (2) \quad \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} - u\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\dfrac{\partial v}{\partial y} - w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ (3) \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial \psi}{\partial z} - u\dfrac{\partial w}{\partial x} - v\dfrac{\partial w}{\partial y} - w\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

Différentions l'équation (3) par rapport à y, l'équation (2) par rapport à z, et retranchons : il vient, en se rappelant la définition de ξ, η, ζ [**9**] :

$$(18) \quad 2\frac{\partial \xi}{\partial t} = -2u\frac{\partial \xi}{\partial x} - 2v\frac{\partial \xi}{\partial y} - 2w\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$- \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

D'autre part,

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} + w\frac{\partial \xi}{\partial z},$$

et l'équation de continuité pour les liquides se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

En tenant compte de ces relations, on met aisément l'équation (4) sous la forme :

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial x} + \zeta\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Nous retrouvons bien l'équation (16). Seulement cette démonstration du théorème de Helmholtz ne s'applique qu'aux liquides.

20. Démonstration de Kirchhoff. — Kirchhoff prend comme point de départ les équations de Lagrange

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

transformées de manière à ne plus dépendre que des variables de Lagrange.

Nous avons :

$$\frac{d\psi}{dx_0} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{dx_0} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx_0} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{dx_0}.$$

Multiplions la première équation de Lagrange par $\frac{dx}{dx_0}$, la deuxième par $\frac{dy}{dx_0}$, la troisième par $\frac{dz}{dx_0}$ et ajoutons : il vient

$$\frac{du}{dt}\frac{dx}{dx_0} + \frac{dv}{dt}\frac{dy}{dx_0} + \frac{dw}{dt}\frac{dz}{dx_0} = \frac{d\psi}{dx_0}.$$

et deux autres équations analogues obtenues par symétrie.

21. On peut d'ailleurs donner à ces équations une forme plus générale en substituant à x_0, y_0, z_0 trois autres variables, a, b, c, définies par trois relations quelconques :

$$x_0 = \varphi_0 (a, b, c)$$
$$y_0 = \varphi_1 (a, b, c)$$
$$z_0 = \varphi_2 (a, b, c)$$

a, b, c ne dépendant pas de t. Les dérivées par rapport à t seront les mêmes dans les deux systèmes de variables.

Faisons la même opération que précédemment et nous trouverons :

$$\frac{du}{dt}\frac{dx}{da} + \frac{dv}{dt}\frac{dy}{da} + \frac{dw}{dt}\frac{dz}{da} = \frac{d\psi}{da}$$

et deux autres en changeant a en b et en c.

Nous aurons finalement le système :

$$(19) \quad \begin{cases} (1) & \sum \frac{du}{dt}\frac{dx}{da} = \frac{d\psi}{da}. \\ (2) & \sum \frac{du}{dt}\frac{dx}{db} = \frac{d\psi}{db}. \\ (3) & \sum \frac{du}{dt}\frac{dx}{dc} = \frac{d\psi}{dc}. \end{cases}$$

Différentions (1) par rapport à b, (2) par rapport à a, et retranchons :

$$\sum \left(\frac{d^2u}{dtdb} \frac{dx}{da} - \frac{d^2u}{dtda} \frac{dx}{db} \right) = 0$$

ou, comme il est facile de le vérifier :

$$\frac{d}{dt} \sum \left(\frac{du}{db} \frac{dx}{da} - \frac{du}{da} \frac{dx}{db} \right) = 0,$$

et enfin :

$$(20) \qquad \begin{aligned} & \frac{du}{db} \frac{dx}{da} - \frac{du}{da} \frac{dx}{db} \\ + & \frac{dv}{db} \frac{dy}{da} - \frac{dv}{da} \frac{dy}{db} \\ + & \frac{dw}{db} \frac{dz}{da} - \frac{dw}{da} \frac{dz}{db} = \text{const.} \end{aligned}$$

On obtient deux autres équations analogues en permutant circulairement a, b, c et changeant la valeur de la constante.

21 *bis*. Ces équations de Kirchhoff sont équivalentes, comme nous allons le montrer à celle que nous avons donnée au début :

$$J = \int u dx + v dy + w dz = \text{const.}$$

Considérons, en effet, un point M dont les coordonnées soient (x, y, z) dans le système d'Euler, ou a, b, c, t dans celui de Kirchhoff : x, y, z varient avec t, mais a, b, c sont indépendants de t et dépendent seulement de x_0, y_0, z_0. Le point M appartient à une certaine courbe C : je puis choisir a, b, c de manière que, pour tous les points de cette courbe, $c = 0$. Si cette condition est remplie à l'instant $t = 0$, elle le sera encore à toute autre époque.

Si nous regardons pour un instant a, b comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, à chaque point M de C correspondra un point M′ du plan et, quand M décrit la courbe C, M′ décrit une certaine courbe C′ qui sera fermée si C est fermé ; seulement la courbe C′ est fixe, tandis que la courbe C est mobile. Prenons l'intégrale

$$\int_C u\,dx$$

le long de la courbe C :

$$\int_C u\,dx = \int_{C'} \left(u \frac{dx}{da}\, da + u \frac{dx}{db}\, db \right),$$

la seconde intégrale étant prise le long de C′. Transformons cette intégrale par la formule de Stokes [**8**]

$$\int_{C'} \left(u \frac{dx}{da}\, da + u \frac{dx}{db}\, db \right) = \iint \left[\frac{d}{da} \left(u \frac{dx}{db} \right) - \frac{d}{db} \left(u \frac{dx}{da} \right) \right]$$

la $\iint$ étant étendue à toute l'aire A′ limitée par la courbe C′.

Effectuons les différentiations indiquées, il vient après réductions :

$$\int_C u\,dx = \iint \left(\frac{du}{da} \frac{dx}{db} - \frac{du}{db} \frac{dx}{da} \right) da\,db.$$

En opérant la même transformation sur $\int_C v\,dy$ et $\int_C w\,dz$, puis additionnant, nous trouverons :

$$(21) \quad J = \int_C u\,dx + v\,dy + w\,dz = \int_{A'} \sum \left(\frac{du}{da} \frac{dx}{db} - \frac{du}{db} \frac{dx}{da} \right) da\,db.$$

L'aire A′ ne varie pas, puisque C′ est fixe ; la Σ placée sous le signe $\int$ est constante en vertu de l'énoncé de Kirchhoff : donc $J = \text{const}$.

CHAPITRE II

CONSÉQUENCES DU THÉORÈME DE HELMHOLTZ

22. Cas des mouvements permanents. — Le mouvement est permanent quand toutes les fonctions que nous avons définies u, v, w, ψ ne dépendent pas de t, mais seulement des variables x, y, z d'Euler. Par conséquent, dans le cas des mouvements permanents :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \qquad \text{etc.}$$

et [**1**] :

$$\frac{du}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

relation qui s'applique d'ailleurs à une fonction quelconque ψ.

Dans ces conditions, on peut déduire du théorème fondamental de Helmholtz un certain nombre de conséquences.

23. Théorème. — Si le mouvement est permanent, il existe

une infinité de surfaces sur lesquelles on peut tracer une infinité de lignes de courant et une infinité de lignes de tourbillon.

Voici ce que signifie cet énoncé :

Par un point A (*fig.* 9), on peut mener une ligne de courant AC et une ligne de tourbillon AT. Si par les différents points de AC nous menons les lignes de tourbillon, elles engendrent une certaine surface; si nous menons de même, par les divers points de AT, les lignes de courant, elles engendrent une autre surface; le théorème signifie que ces deux surfaces sont identiques.

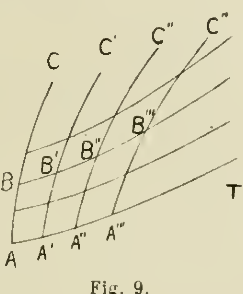


Fig. 9.

Autrement encore, si nous menons par les points A, A′, A″, A‴ de AT les lignes de courant AC, A′C′, A″C″, A‴C‴, une ligne de tourbillon menée par un point B quelconque de AC rencontrera AC, A′C′ ..., etc.

Cette proposition est presque évidente. En effet, quand le mouvement est permanent, les lignes de courant sont les trajectoires des molécules fluides. Or considérons les molécules qui à l'époque $t = o$ sont en A, A′, A″, A‴ ; à l'époque t, elles sont venues en B, B′, B″, B‴. Comme les tourbillons se conservent en vertu du théorème de Helmholtz, les molécules B, B′, B″, B‴ sont encore sur une même ligne de tourbillon.

24. Equation générale de ces surfaces. — Nous avons posé [**4**]:

$$\psi = V - \int \frac{dp}{\rho}$$

$$T = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

Je dis que l'équation des surfaces que nous venons de définir est :

$$\psi - T = \text{const.}$$

Pour le démontrer, il suffit de montrer que $\psi - T$ est constant d'une part sur les lignes de courant, d'autre part sur les lignes de tourbillon.

1° Sur les lignes de courant. — Ces lignes sont les trajectoires des molécules ; nous suivons une molécule dans son mouvement ; avec les notations de Lagrange, t seul est variable, donc :

$$d\psi = \frac{d\psi}{dt}\, dt$$

$$dT = \frac{dT}{dt}\, dt$$

$$dT = udu + vdv + wdw = u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} + w\frac{dw}{dt}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = u\frac{\partial\psi}{\partial x} + v\frac{\partial\psi}{\partial y} + w\frac{\partial\psi}{\partial z} = u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} + w\frac{dw}{dt}$$

car, d'après les équations de Lagrange [**4**] :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad \text{etc.}$$

Donc :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{dT}{dt} \text{ ou } d\psi - dT = 0.$$

$$(1) \qquad \psi - T = \text{const.}$$

2° Sur les lignes de tourbillon. — Ces lignes ont pour équations :

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = d\alpha,$$

ou :

$$dx = \xi d\alpha \qquad dy = \eta d\alpha \qquad dz = \zeta d\alpha.$$

Je dis que :

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{dT}{d\alpha}.$$

En effet :

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\xi + \frac{\partial\psi}{\partial y}\eta + \frac{\partial\psi}{\partial z}\zeta.$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{du}{dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}, \text{ etc.}$$

Substituons :

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{d\alpha} = u\left(\xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial x} + \zeta\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ + v\left(\xi\frac{\partial u}{\partial y} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ + w\left(\xi\frac{\partial u}{\partial z} + \eta\frac{\partial v}{\partial z} + \zeta\frac{\partial w}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{dT}{d\alpha} &= u\frac{du}{d\alpha} + v\frac{dv}{d\alpha} + w\frac{dw}{d\alpha}\\ &= u\left(\xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\ &+ v\left(\xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\ &+ w\left(\xi\frac{\partial w}{\partial x} + \eta\frac{\partial w}{\partial y} + \zeta\frac{\partial w}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

Mais nous avons vu [**18**] que :

$$\xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z} = \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial x} + \zeta\frac{\partial w}{\partial x}.$$

. . . . etc.

Par conséquent :

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{dT}{d\alpha} \text{ et } \psi - T = \text{const.}$$

25. Théorème de Bernouilli. — Dans le cas où les tourbillons sont nuls, c'est-à-dire quand il existe une fonction des vitesses :

$$\xi = \eta = \zeta = 0.$$

La direction du tourbillon est indéterminée ; une ligne quelconque peut être regardée comme une ligne de tourbillon et $\psi - T$ est constant dans tout l'espace : c'est le théorème de Bernouilli.

26. Détermination des vitesses en fonction des tourbillons. — Nous nous proposons, étant données les composantes ξ, η, ζ du tourbillon d'en déduire les composantes de la vitesse u, v, w.

Si nous pouvons résoudre ce problème, comme les tourbillons se conservent, nous connaîtrons la vitesse avec laquelle ils se déplacent et, par conséquent, leur direction et leur grandeur, à une époque $t + dt$ infiniment peu différente de la première, puis par intégration à une époque quelconque.

Remarquons d'abord que ce problème est en général indéterminé, sauf dans deux cas seulement : quand il s'agit d'un liquide homogène, occupant un espace indéfini, ou d'un liquide homogène remplissant entièrement le vase qui le renferme.

27. Volumes à connexion simple et volumes à connexion multiple. — Avant d'aborder l'étude de la question

proposée, il est indispensable de définir ce que nous appellerons volume à connexion simple et volume à connexion multiple: ce sont des notions dont nous aurons constamment à faire usage.

Un volume à connexion simple, ou volume simplement connexe est un volume qui ne présente pas de trou : els sont la sphère, l'ellipsoïde, le cube.

Toute courbe fermée tracée dans l'intérieur d'un pareil volume peut se réduire à un point, en se déformant d'une manière continue, sans sortir du volume (*fig.* 10), elle balaye alors une certaine aire A qui est exclusivement limitée par la courbe.

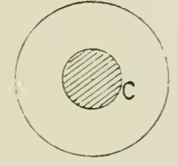


Fig. 10.

Nous conviendrons donc de dire qu'un volume est à connexion simple quand toute courbe fermée intérieure à ce volume peut être regardée comme le contour d'une aire plane située tout entière à l'intérieur du volume. Si l'on adopte cette définition le volume compris entre deux sphères concentriques est encore à connexion simple.

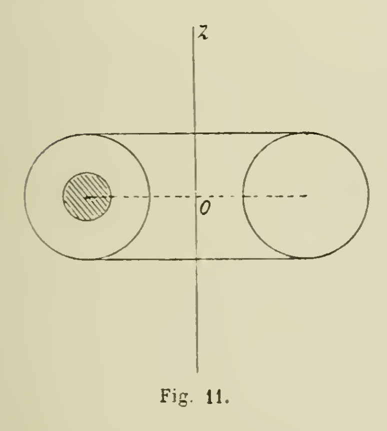


Fig. 11.

28. Un volume à connexion multiple est un volume qui présente un ou plusieurs trous: le nombre des trous marque l'ordre de multiplicité; tel est un tore (*fig.* 11).

Dans les volumes à connexion multiple on peut tracer des

courbes fermées de deux espèces; des courbes de première espèce, comme celles que nous avons définies au paragraphe précédent, pouvant se réduire à un point sans sortir du volume. Telles seraient, dans le tore, les circonférences tracées dans un plan méridien, concentriques à l'une des circonférences méridiennes.

Des courbes de seconde espèce, qui ne peuvent se réduire à un point, par une déformation continue, sans sortir du volume : par exemple, dans un tore, les circonférences tracées dans des plans perpendiculaires à l'axe et ayant leur centre sur cet axe.

29. Ceci posé, supposons que le tourbillon soit nul.

$$\xi = \eta = \zeta = 0$$

et considérons l'intégrale

$$J = \int (u dx + v dy + w dz).$$

Cette intégrale prise le long d'une courbe fermée de première espèce est nulle. En effet [**9**] :

$$J = \int 2\xi_n d\omega,$$

ξ_n étant la composante normale du tourbillon, $d\omega$ un élément de l'aire limitée par la courbe. Comme par hypothèse :

$$\xi_n = 0, \qquad \text{on a} \qquad J = 0.$$

Cette proposition n'est plus vraie pour les courbes de seconde espèce. Supposons en effet que le volume soit celui d'un tore

et que :

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad v = -\frac{x}{x^2 + y^2} \quad w = 0.$$

Les lignes de courants sont des cercles ayant leur centre situé sur l'axe et tracés dans des plans perpendiculaires à cet axe.

$$udx + vdy = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d \text{ arc tang } \frac{y}{x}.$$

Cette fonction des vitesses arc tang $\frac{y}{x}$ n'est pas uniforme, mais elle est susceptible d'une infinité de déterminations qui diffèrent entre elles de π. Quand nous prendrons l'intégrale J le long d'une courbe de seconde espèce, cette intégrale sera égale non pas à 0, mais à π ou à un multiple de π : parce qu'en revenant au point de départ on retrouve une autre détermination de la fonction.

30. Coupures. — Lorsqu'un volume est à connexion multiple, il est possible de le rendre simplement connexe en pratiquant des coupures. Si en particulier le volume est doublement connexe, il suffit de faire une seule coupure. Par exemple, un tore peut être rendu simplement connexe en le coupant le long d'un de ses cercles méridiens.

Les courbes qui ne traversent pas la coupure seront de première espèce ; les courbes qui traversent la coupure seront de deuxième espèce.

La fonction des vitesses reste uniforme tant qu'on ne traverse pas la coupure, et l'intégrale J prise le long d'une courbe qui ne traverse pas la coupure est nulle.

Considérons au contraire deux points infiniment voisins l'un

de l'autre, et infiniment voisins de la coupure, mais situés de part et d'autre de cette coupure : d'un de ces points à l'autre la fonction des vitesses présente une discontinuité ; la différence des valeurs qu'elle prend en ces deux points est finie et égale à la valeur de l'intégrale J prise le long d'une courbe de deuxième espèce reliant les deux points.

31. Théorème. — Cette différence est constante, autrement dit la valeur de l'intégrale J est la même pour toutes les courbes d'intégration qui traversent une seule fois la coupure.

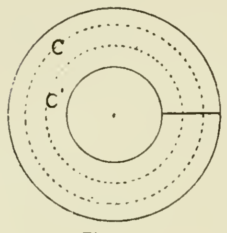


Fig. 12.

Supposons, en effet, que la courbe C se déforme d'une manière continue, sans sortir du volume et devienne par exemple telle que C′ (*fig.* 12). Pendant cette déformation, la courbe C balaye une certaine aire qui est tout entière située à l'intérieur du volume.

L'intégrale J prise le long du contour complet de cette aire CC′ est nulle.

Seulement les deux courbes C et C′ sont parcourues en sens contraire, donc :

$$J_C - J_{C'} = 0$$

ou

$$J_C = J_{C'}.$$

La valeur de la discontinuité de la fonction φ des vitesses d'un bord à l'autre de la coupure est donc la même en tous les points de cette coupure : soit A sa valeur.

Si la courbe de deuxième espèce suivant laquelle on fait

l'intégration traverse deux fois la coupure, la discontinuité de la fonction φ sera $2A$, etc. D'une manière générale, si le contour d'intégration traverse la coupure n fois dans le sens direct, n' fois dans le sens inverse, la valeur de l'intégrale sera $(n - n')$ A.

32. Si le volume est triplement connexe (*fig.* 13), il faut pratiquer deux coupures pour le rendre simplement connexe. La fonction des vitesses φ est alors entièrement déterminée; mais elle présente une discontinuité d'un bord à l'autre de chacune des coupures. Cette discontinuité a une valeur constante A le long de la première coupure, et une valeur constante B généralement différente de A le long de la seconde.

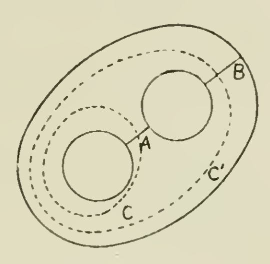


Fig. 13.

Si le contour d'intégration C rencontre une seule fois la première coupure

$$J_C = A.$$

Si ce contour C′ rencontre une seule fois la seconde coupure, sans traverser la première

$$J_{C'} = B.$$

Enfin, d'une manière générale, si le contour d'intégration traverse la première coupure n fois dans le sens direct, n' fois dans le sens inverse, et la seconde coupure p fois dans le sens direct, p' fois dans le sens inverse, on a :

$$J = (n - n')\,A + (p - p')\,B.$$

CHAPITRE III

DÉTERMINATION DES COMPOSANTES DE LA VITESSE EN FONCTION DES COMPOSANTES DU TOURBILLON CAS PARTICULIER DES LIQUIDES

33. Nous avons établi dans le cas général [**3**] l'équation de continuité :

$$(1) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,$$

s'il s'agit d'un liquide, la densité ρ est constante et cette équation se réduit à :

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Supposons que le tourbillon soit nul partout, autrement dit, que l'expression

$$udx + vdy + wdz$$

soit une différentielle exacte, $d\varphi$; φ sera la fonction des vitesses.

L'équation de continuité s'écrit alors :

$$\Delta\varphi = 0,$$

en posant comme d'habitude :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

34. Théorème. — Il y a deux cas où ces conditions ne peuvent être remplies sans que le liquide soit en repos.

1° Quand le liquide remplit l'espace indéfini et se trouve en repos à l'infini ;

2° Quand le liquide remplit entièrement un vase solide, fermé et simplement connexe.

Nous démontrerons ces deux propositions en nous appuyant sur le théorème de Green, qui s'exprime par l'équation :

$$(3) \int \varphi \frac{d\varphi}{dn} d\omega = \int \varphi \Delta\varphi d\tau + \int \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau$$

L'intégrale du premier membre est étendue à tous les éléments $d\omega$ d'une surface fermée; les deux autres, à tous les éléments $d\tau$ du volume limité par cette surface. $\frac{d\varphi}{dn}$ est la dérivée de φ estimée suivant la normale à la surface au centre de gravité de l'élément $d\omega$. Ici c'est la projection de la vitesse sur cette normale. La fonction φ doit être uniforme à l'intérieur du volume τ.

35. Liquide occupant un espace indéfini. — Appliquons le théorème de Green à une sphère de rayon très grand.

Comme nous supposons que le liquide est en repos à l'infini, $\frac{d\varphi}{dn}$ sera nul sur toute la surface de cette sphère; l'intégrale du premier membre sera nulle. La première intégrale du second membre est aussi nulle, puisque $\Delta\varphi = 0$; par

conséquent il en est de même de la dernière:

$$\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]d\tau = 0.$$

L'élément différentiel est essentiellement positif, c'est une somme de carrés; cette égalité entraîne donc les suivantes:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

ou

$$u=0 \quad v=0 \quad w=0.$$

La vitesse est donc nulle.

36. Liquide remplissant complètement un vase immobile. — 1° *Vase simplement connexe.* — Appliquons encore le théorème de Green: en choisissant pour la surface d'intégration la surface des parois du vase, et pour le volume, le volume du vase. Puisque la paroi est immobile, la vitesse du liquide en un point de cette paroi ne peut être que tangentielle, et la composante normale $\frac{d\varphi}{dn}$ est nulle; donc :

$$\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\omega = 0;$$

comme $\Delta\varphi = 0$,

$$\int\varphi\Delta\varphi d\tau = 0,$$

et par conséquent:

$$\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]d\tau = 0.$$

On en déduit comme ci-dessus :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0.$$

La vitesse est donc nulle en tous les points.

37. Le raisonnement qui précède n'a de valeur que pour un volume simplement connexe. Si le vase était à connexion multiple, la fonction φ ne serait plus uniforme, et le théorème de Green cesserait d'être applicable.

38. 2° *Vase doublement connexe.* — Supposons que le vase soit doublement connexe, et par exemple qu'il ait la forme d'un tore. Pratiquons une coupure suivant un cercle méridien : les courbes fermées de seconde espèce rencontreront cette coupure. La fonction des vitesses φ est uniforme tant qu'on ne traverse pas cette coupure ; mais d'un bord à l'autre, la fonction φ présente une discontinuité qui est constante sur toute la surface de la coupure.

Je dis que, si on se donne cette constante, autrement dit la valeur de J le long d'une courbe de seconde espèce, le mouvement du liquide est entièrement déterminé.

Supposons, en effet, qu'il y ait deux solutions possibles, et soient φ' et φ'' les deux fonctions des vitesses correspondant à ces solutions ; soient φ_1' et φ_2' les valeurs de φ' de part et d'autre de la coupure, φ_1'' et φ_2'' celles de φ''. Nous aurons :

$$\varphi_1' - \varphi_2' = J_0$$
$$\varphi_1'' - \varphi_2'' = J_0$$

J_0 étant la constante donnée ; tant qu'on ne traverse pas la coupure, φ' et φ'' sont d'ailleurs uniformes. Retranchons

membre à membre les deux équations ci-dessus, il vient:

$$\varphi'_1 - \varphi''_1 = \varphi'_1 - \varphi''_2.$$

La fonction $\varphi' - \varphi''$ a donc même valeur de part et d'autre de la coupure, elle est uniforme et continue dans tout le volume, et on peut lui appliquer le théorème de Green ; on en déduira :

$$\frac{\partial(\varphi' - \varphi'')}{\partial x} = 0, \quad \text{etc.}$$

ou

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x} = \frac{\partial\varphi''}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial y} = \frac{\partial\varphi''}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial z} = \frac{\partial\varphi''}{\partial z}.$$

Les composantes de la vitesse sont les mêmes dans les deux cas : il y a donc un seul mouvement possible.

39. 3° *Vase triplement connexe.* — Il faut faire dans ce cas deux coupures pour rendre le volume simplement connexe.

Le mouvement est déterminé quand on se donne :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = J_0 \qquad \varphi_3 - \varphi_4 = J_1$$

$\varphi_1 - \varphi_2$ étant la différence des valeurs de φ sur les deux bords de la première coupure, $\varphi_3 - \varphi_4$ cette différence relativement à la seconde coupure.

On trouverait comme précédemment, en admettant qu'il existe deux solutions φ' et φ'' :

$$\varphi'_1 - \varphi'_2 = \varphi''_1 - \varphi''_2$$
$$\varphi'_3 - \varphi'_4 = \varphi''_3 - \varphi''_4.$$

La fonction $\varphi' - \varphi''$ étant uniforme et continue à l'intérieur

du volume, on déduit du théorème de Green :

$$\varphi' - \varphi'' = \text{const.}$$

ou :

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = \frac{\partial \varphi''}{\partial x}. \qquad \text{etc.}$$

40. Le tourbillon n'est pas nul. — Dans le cas où le tourbillon n'est pas nul, le problème de Helmholtz est déterminé et, s'il admet une solution, n'en admet qu'une seule.

En effet, quel est ce problème? Il s'agit, étant données les composantes ξ, η, ζ du tourbillon, de déterminer u, v, w d'après les équations :

$$(4) \quad \begin{cases} 2\xi = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ 2\eta = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 2\zeta = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Supposons que nous ayons trouvé deux solutions :

$$\begin{matrix} u = u' & u = u'' \\ v = v' & v = v'' \\ w = w' & w = w'' \end{matrix}$$

Nous aurons :

$$2\xi = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}$$

$$2\xi = \frac{\partial w''}{\partial y} - \frac{\partial v''}{\partial z}$$

d'où :

$$0 = \frac{\partial(w' - w'')}{\partial y} - \frac{\partial(v' - v'')}{\partial z}$$

et deux autres équations analogues. Ces trois équations expriment que la somme

$$(u' - u'')\, dx + (v' - v'')\, dy + (w' - w'')\, dz$$

est une différentielle exacte $d\varphi$. On peut donc poser :

$$u' - u'' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad \text{etc.}$$

Ecrivons que l'équation de continuité est satisfaite pour $u = u'$..... etc., et pour $u = u''$..... etc., il vient :

$$\sum \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \qquad \sum \frac{\partial u''}{\partial x} = 0\,;$$

d'où, en retranchant membre à membre :

$$\sum \frac{\partial(u' - u'')}{\partial x} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\Delta\varphi = 0.$$

Si le vase est entièrement rempli, la composante normale de la vitesse doit être nulle en chaque point de la paroi. Soient l, m, p les cosinus directeurs de la normale en un point de la paroi, la composante normale de la vitesse sera :

$$lu + mv + pw,$$

et si cette composante est nulle :

$$lu' + mv' + pw' = 0$$
$$lu'' + mv'' + pw'' = 0$$

Par conséquent :

$$l\frac{\partial\varphi}{\partial x}+m\frac{\partial\varphi}{\partial y}+p\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0.$$

Si le vase est à connexion simple, nous trouverons, en raisonnant comme ci-dessus [36] :

$$\varphi=\text{const.}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

ou :

$$u'=u'' \qquad v'=v'' \qquad w'=w''$$

Le problème ne comporte donc qu'une seule solution.

41. Supposons que le vase soit à connexion multiple, le raisonnement précédent n'est plus légitime ; il faut introduire une ou plusieurs conditions de plus.

Soit, par exemple, un volume doublement connexe. Pratiquons une coupure, et soit J_0 la valeur de l'intégrale prise le long d'une courbe fermée qui traverse une seule fois la coupure.

Le problème sera déterminé si on se donne, outre les valeurs de ξ, η, ζ, celle de J_0.

Supposons, en effet, qu'il puisse exister deux solutions, (u', v', w') et (u'', v'', w''), nous démontrerions comme plus haut [38] que :

$$u'-u''=\frac{\partial\varphi}{\partial x};\ v'-v''=\frac{\partial\varphi}{\partial y};\ w'-w''=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \qquad \Delta\varphi=0.$$

D'autre part :

$$\int u'dx + v'dy + w''dz = J_0$$

$$\int u''dx + v''dy + w''dz = J_0$$

et en retranchant membre à membre :

$$\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = 0,$$

ou :

$$\int d\varphi = 0.$$

La fonction φ reste donc uniforme, même quand on supprime la coupure ; elle doit se réduire à une constante : par conséquent :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u' - u'' = 0 \qquad \text{ou} \qquad u' = u'', \qquad \text{etc.}$$

42. Si le volume était triplement connexe, il faudrait pratiquer deux coupures. Pour déterminer le problème, il est nécessaire de se donner, outre les valeurs de ξ, η, ζ, la valeur J_0 de l'intégrale J prise le long d'une courbe fermée rencontrant une fois la première coupure seulement et sa valeur J_1 le long d'une courbe fermée, rencontrant une fois la deuxième coupure seule.

43. Analogie des équations hydrodynamiques de Helmholtz et des équations électrodynamiques de Maxwell. — 1° Supposons que le liquide considéré occupe un espace indéfini et soit en repos.

Dans ce cas, le système des équations de Helmholtz présente la même forme que le système des équations de Maxwell, relatif au champ magnétique.

Maxwell appelle u, v, w les composantes du courant, ce qui signifie qu'un élément de surface $d\omega$ normal à ox est traversé dans le temps dt par une quantité d'électricité $u\,d\omega\,dt$... etc. α, β, γ sont les composantes du champ magnétique produit par le courant : a, b, c, les composantes de l'induction magnétique qui se réduisent à α, β, γ quand il n'y a ni aimant permanent, ni fer doux. L'équation

$$\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}=0$$

de Maxwell se réduit alors à la suivante :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}=0.$$

Si nous comparons les deux systèmes, nous trouvons :

(Maxwell) [1]	(Helmholtz)
$4\pi u=\frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial z}$	$2\xi=\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}$
$4\pi v=\frac{\partial \alpha}{\partial z}-\frac{\partial \gamma}{\partial x}$	$2\eta=\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}$
$4\pi w=\frac{\partial \beta}{\partial x}-\frac{\partial \alpha}{\partial y}$	$2\zeta=\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}$
$\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}=0.$	$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0.$

On voit que, pour passer des équations de Helmholtz à celles

(1) Voir *Électricité et optique*, I, § 102 et § 118.

de Maxwell, il suffit de changer ζ, η, ξ, u, v, w respectivement en $2\pi u$, $2\pi v$, $2\pi w$, α, β, γ.

Nous avons démontré que, si un pareil système admet une solution, cette solution est unique.

Or supposons que nous connaissions en grandeur, direction et sens le vecteur tourbillon. Divisons ce vecteur par 2π et admettons que ce vecteur ainsi réduit représente un courant électrique. Le système de courants ainsi obtenu produit un champ magnétique, et le vecteur qui représente ce champ représentera la vitesse de la molécule fluide au même point. Les lignes de force magnétiques seront les lignes de courant hydrodynamiques.

44. Cas où il existe un seul tube de tourbillons. — Supposons qu'il existe un seul tube de tourbillons fermé et de section infiniment petite, que le tourbillon ait en chaque point une valeur assez grande pour que le moment du tube soit fini, et enfin que le tourbillon soit partout nul en dehors du tube.

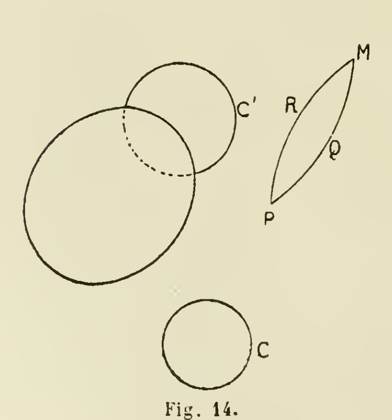


Fig. 14.

En raison de cette dernière hypothèse, il y aura en dehors du tube une fonction des vitesses φ. Mais le volume extérieur au tube est doublement connexe, car on peut tracer deux sortes de courbe fermées : les unes, telles que C (*fig.* 14), qui n'enlacent pas le tube ; les autres C' s'enlaçant avec lui à la façon des

anneaux d'une chaîne. L'intégrale J prise le long des premières courbes est nulle ; mais, prise le long des courbes de la seconde espèce, elle est égale non plus à o, mais au moment du tube.

La section du tube étant infiniment petite, ce tube peut être assimilé à une courbe que je supposerai fermée et que j'appellerai l'axe du tube. En effet, nous pouvons faire passer par l'axe du tube tourbillonnaire une certaine surface et prendre comme coupure l'aire limitée sur cette surface par l'axe du tube. Toutes les courbes fermées qui ne traverseront pas cette aire seront de première espèce; celles qui la traversent seront de seconde espèce [**30**].

45. Supposons que la fonction φ soit nulle à l'infini, ce qui est permis puisque cette fonction n'est donnée que par ses dérivées et n'est, par conséquent, déterminée qu'à une constante près. Pour définir la valeur de φ en un point donné P, nous prendrons l'intégrale J le long d'une courbe joignant un point infiniment éloigné au point P considéré, sans traverser la coupure. Cette définition n'est évidemment suffisante que si la fonction φ est uniforme et, par conséquent, si la valeur ainsi calculée ne dépend pas du chemin suivi pour venir de l'infini au point P. Or cette condition est remplie. En effet, considérons deux chemins quelconques, MQP, MRP, joignant un point M très éloigné au point P. Le long du contour fermé MQPRM, qui ne traverse pas la coupure, l'intégrale J est nulle, donc :

$$\int_{MQP} d\varphi + \int_{PRM} d\varphi = 0$$

ou

$$\int_{MQP} d\varphi = \int_{MRP} d\varphi = \varphi_P.$$

La valeur de φ ainsi calculée en un point M dépend de la surface choisie comme coupure ; elle est la même pour deux coupures qui ne comprennent pas entre elles le point M, mais elle est différente si le point M se trouve entre les deux surfaces choisies successivement comme coupures.

Il faut maintenant déterminer cette valeur de φ. Soit μ le moment du tube tourbillonnaire :

$$\mu = 2\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\, d\omega;$$

$d\omega$ étant la section droite du tube, que nous avons supposée infiniment petite. Si nous remplaçons les tourbillons (ξ, η, ζ) par des courants (u, v, w), chacune des composantes du courant est égale à la composante correspondante du tourbillon divisée par 2π. L'intensité du courant, comptée tangentiellement au tube tourbillonnaire, sera :

$$i = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\, d\omega.$$

Par conséquent :

$$\mu = 4\pi i.$$

Si on détermine la valeur de i d'après cette égalité, la force magnétique et la vitesse d'une molécule fluide en un point seront représentées par le même vecteur. La fonction des vitesses sera le potentiel magnétique du courant. En un point donné, ce potentiel a, comme on le sait, pour expression

$$i\sigma,$$

σ étant l'angle solide sous lequel on voit de ce point le contour du courant. (Cf. *Electricité et optique*, tome I, page 107.) Par

suite :

$$\varphi = i\sigma = \frac{\mu\sigma}{4\pi}.$$

σ étant l'angle solide sous lequel on voit du point considéré l'axe du tube tourbillonnaire.

S'il y avait plusieurs tubes tourbillonnaires, la fonction φ relative au système serait la somme des fonctions φ_1, φ_2 ... etc., relatives à chacun d'eux, et la même relation subsisterait.

46. Cas d'un tube tourbillonnaire rectiligne et indéfini. — Soit un tube tourbillonnaire rectiligne.

Appliquons la règle précédente. Nous devons remplacer le tube par un courant rectiligne indéfini, possédant une intensité :

$$i = \frac{\mu}{4\pi}.$$

D'après la loi de Biot et Savart, l'action de ce courant sur un pôle magnétique M est perpendiculaire au plan MPQ et inversement proportionnelle à la distance r du point M à la droite PQ. La vitesse d'une molécule fluide M sera donc perpendiculaire au plan MPQ et variera en raison inverse de sa distance à l'axe du tube tourbillonnaire.

47. Ce résultat peut d'ailleurs s'obtenir directement, sans l'intermédiaire de la comparaison électrodynamique.

Par raison de symétrie, la vitesse doit se trouver dans le plan R mené par M perpendiculairement à PQ. Si, d'autre part, nous considérons le plan PMQ, ce n'est pas, à proprement parler, un plan de symétrie. En effet, prenons pour plan de la

figure le plan R (*fig.* 15) : la droite $P\varphi$ se projette sur ce plan en N. MN est la trace du plan PMQ. Supposons que le tourbillon ait le sens indiqué par la flèche et que la vitesse soit dirigée suivant MV.

Prenons l'image de la figure par rapport à MN ; le moment du tube tourbillonnaire conserve la même valeur, mais le tourbillon change de sens. La vitesse conservera donc sa grandeur absolue et sa direction, mais changera de sens ; elle devient MV'. Comme MV' doit être symétrique de MV par rapport à MN, il faut que MV soit perpendiculaire à MN et, par conséquent, au plan MPQ, puisque nous savons que MV est situé dans le plan R.

Fig. 15.

48. Pour trouver la grandeur de la vitesse, rappelons que :

$$J = \int (udx + vdy + wdz) = \mu.$$

Choisissons comme contour d'intégration le cercle décrit de N comme centre avec MN comme rayon, dans le plan perpendiculaire à PQ ; prenons PQ comme axe des z, le point N comme origine, comme axes des x et des y deux diamètres rectangulaires du cercle. Dans ce système d'axes :

$$x = \rho \cos \omega \qquad y = \rho \sin \omega$$

$$dx = -\rho \sin \omega d\omega \qquad dy = \rho \cos \omega d\omega \qquad dz = 0$$

$$u = -V \sin \omega, \qquad v = V \cos \omega, \qquad w = 0.$$

D'où :

$$\mu = \int_0^{2\pi} \rho V (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega)\, d\omega = 2\pi\rho V$$

$$V = \frac{\mu}{2\pi\rho}.$$

Cette vitesse est donc inversement proportionnelle à la distance $MN = \rho$, comme nous l'avons trouvé par une autre méthode.

49. Démonstration directe. — Il n'est pas indispensable, pour obtenir l'expression de la fonction φ, d'avoir recours à la comparaison entre les équations hydrodynamiques et les équations électrodynamiques, comme nous l'avons fait; cette expression peut s'obtenir directement comme je vais le montrer.

Pour abréger, nous dirons que la fonction φ est engendrée par un contour C quand elle est due à un tube tourbillonnaire dont ce contour C est l'axe, et nous conviendrons de prendre un tube tourbillonnaire dont le moment soit égal à 1. Ce choix d'unité n'enlèvera rien évidemment à la généralité de notre démonstration. Je vais d'abord établir quelques théorèmes qui nous seront nécessaires pour trouver l'expression de la fonction φ.

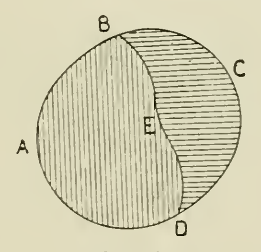


Fig. 16.

50. Théorème I. — Considérons une courbe fermée ABCD (*fig.* 16); joignons deux points de cette courbe, B, D, par un chemin quelconque BED. Nous formons ainsi deux contours partiels, ABEC, BCDE, et un contour total, ABCD. Admettons

que ces contours forment les axes de trois tubes tourbillonnaires T′, T″ et T. Chacun des contours engendre une fonction φ. Soient φ', φ'' et φ les fonctions correspondant respectivement à T′, T″ et T. Je dis que :

$$\varphi = \varphi' + \varphi''.$$

En effet, par les trois courbes nous pouvons faire passer une certaine surface, laquelle détermine deux coupures. La fonction φ admet les deux coupures ; φ' n'admet que la coupure (1), et φ'' la coupure (2). Pour établir le théorème, il suffit de montrer qu'on a identiquement :

$$\varphi - \varphi' - \varphi'' = 0.$$

Cette fonction vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta\,(\varphi - \varphi' - \varphi'') = 0,$$

puisque :

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi' = \Delta\varphi'' = 0;$$

elle s'annule à l'infini, de même que les fonctions partielles φ, φ', φ''. Il est permis de lui appliquer le théorème de Green [**34**], si elle est uniforme, c'est-à-dire si l'intégrale

$$\int d\varphi - \int d\varphi' - \int d\varphi'' = 0$$

le long d'un contour fermé quelconque. Supposons que la courbe d'intégration soit de première sorte, c'est-à-dire ne rencontre aucune coupure; alors les trois intégrales partielles sont nulles. Si la courbe franchit la coupure (1) seulement, $\int d\varphi$ est égal au moment du tube T, c'est-à-dire à 1 par hypothèse. $\int d\varphi'$ est égal au moment du tube T′, qui est aussi 1.

$\int d\varphi''$ est nul. L'équation est encore vérifiée ; on l'établirait de la même manière si la courbe d'intégration rencontrait seulement la coupure (2).

D'ailleurs un contour fermé quelconque peut toujours être remplacé par une série de contours dont chacun ne rencontre qu'une seule coupure (*fig.* 17). Ainsi le contour MNPQ, qui rencontre les deux coupures, peut être remplacé par MNRQM, qui ne rencontre que la première coupure, et NPQRN, qui ne rencontre que la deuxième. En effet parcourir ces deux contours revient à parcourir le contour primitif dans un sens déterminé, et l'arc NRQ une fois dans un sens et une fois dans l'autre ; cet arc disparaît dans le résultat. Par conséquent, le long d'un contour quelconque :

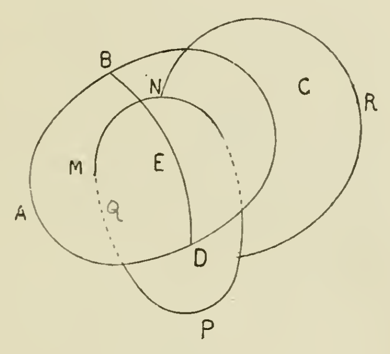


Fig. 17.

$$\int d\varphi - \int d\varphi' - \int d\varphi'' = 0$$

La fonction $\varphi - \varphi' - \varphi''$ est uniforme et par conséquent, d'après le théorème de Green, identiquement nulle.

51. Théorème II. — La fonction φ engendrée par un contour plan C est nulle en tout point du plan.

Soit C le contour (*fig.* 18) ; représentons la direction du tourbillon par une flèche, prenons la figure symétrique par

rapport au plan du contour. φ ne doit pas changer. Le point M, qui appartient au plan de symétrie, ne change pas; le moment du tube conserve la même valeur absolue, mais change de signe, car le mouvement du tourbillon change de sens. La fonction φ doit à la fois ne pas changer et modifier son origine : elle ne peut être que nulle.

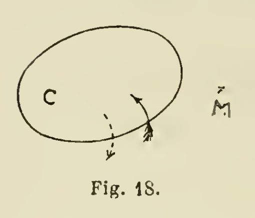


Fig. 18.

52. Théorème III. — Supposons qu'un contour C soit tracé sur la surface d'un cône ayant son sommet en M (*fig.* 19). On peut tracer sur la surface du cône deux espèces de courbes: les unes, limitant une aire dans laquelle ne se trouve pas le sommet ; les autres faisant le tour du cône et limitant une aire qui comprend le sommet.

a. Pour les courbes de la première espèce, la fonction φ est nulle au point M. En effet, on peut décomposer C en contours infiniment petits, dont chacun peut être assimilé à un élément plan situé dans le plan tangent au cône : comme tous ces plans tangents passent par le sommet M du cône, la fonction φ engendrée par chacun d'eux est nulle. La fonction φ engendrée par le contour entier C étant la somme des fonctions élémentaires [50] sera nulle aussi.

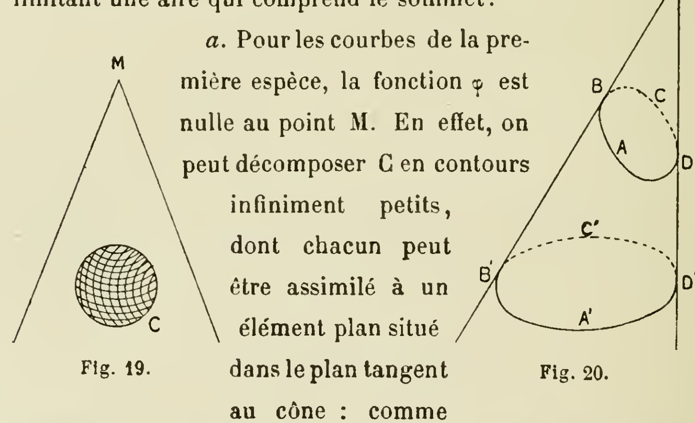


Fig. 19.

Fig. 20.

b. Soient maintenant deux courbes de seconde espèce ABCD et A'B'C'D' (*fig.* 20).

Je dis que les fonctions φ engendrées par ces deux courbes ont même valeur au point M.

Joignons, en effet, un point B de la première courbe à un point B′ de la seconde, par la génératrice BB′ par exemple ; joignons de même DD′. Je puis remplacer le contour ABCD par les contours A′B′C′D′, ABB′A′D′DA, CDD′C′B′BC. En décrivant, en effet, successivement ces trois contours dans le sens indiqué par la succession des lettres, je parcourrai chacun des arcs deux fois en sens contraire, sauf ABCD. Or les fonctions φ engendrées par les deux derniers contours sont nulles d'après la première partie du théorème (a) ; donc les fonctions engendrées par les courbes ABCD et A′B′C′D′, qui ont même perspective au point M, ont la même valeur en ce point.

53. Contour infiniment petit. Forme de la fonction φ. — Supposons que le contour soit infiniment petit. La fonction φ, *a priori*, peut dépendre de la distance r du point M à la surface élémentaire limitée par le contour ; de l'angle ψ que fait la droite qui joint le point M au centre de gravité de l'élément avec cet élément ; de l'aire de cet élément et enfin de sa forme. Autrement dit, φ peut dépendre de r, de ψ, de l'angle solide et de la forme du cône qui a pour directrice le contour et pour sommet le point M.

Je dis d'abord que φ ne peut dépendre de la forme de ce cône. En effet, cette aire infiniment petite du premier ordre peut être décomposée en carrés qui seront infiniment petits du second ordre ; tous ces carrés ont même forme, l'angle ψ a même valeur pour chacun d'eux, à des infiniment petits près d'ordre supérieur. En outre, on peut rendre leur nombre assez grand pour que leur ensemble diffère aussi peu

qu'on voudra de l'aire considérée, quelle que soit sa forme. La valeur de φ engendrée par le contour total sera la somme des fonctions φ relatives à chacun des carrés ; mais, comme ces fonctions sont les mêmes pour chaque carré, puisque r et ψ sont les mêmes, et que les carrés ont même forme, la fonction totale φ sera proportionnelle au nombre des carrés, c'est-à-dire à l'aire limitée par le contour, et sera indépendante de sa forme. Par conséquent, nous pouvons poser :

$$\varphi = d\sigma f(r, \psi)$$

$d\sigma$ étant l'angle solide du cône, et f une fonction qu'il nous faut déterminer.

$d\sigma$ a même valeur tout le long du cône ; d'autre part, deux courbes fermées C et C', tracées sur le cône, doivent engendrer la même fonction φ ; mais pour ces deux courbes r et ψ peuvent être quelconques ; il faut donc que :

$$f(r, \psi) = \text{const} = \text{A}.$$

54. S'il s'agit d'une courbe fermée finie, nous la décomposerons en courbes élémentaires ; pour chacune d'elles φ sera proportionnel à l'angle solide $d\sigma$. Pour l'ensemble, on aura :

$$\varphi = \text{A}\sigma$$

σ étant l'angle solide total.

Pour déterminer A, supposons que le point M décrive un contour fermé quelconque, il viendra :

$$\int d\varphi = \text{A}\int d\sigma,$$

en appelant μ le moment du tube tourbillonnaire :

$$\int d\varphi = \mu.$$

D'autre part :

$$\int d\sigma = 4\pi,$$

d'où :

$$\mu = 4\pi A,$$

et :

$$\varphi = \frac{\mu\sigma}{4\pi}.$$

55. Liquide remplissant complètement un vase simplement connexe. — Nous nous proposons de déterminer u, v, w d'après les équations

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

correspondant en électrodynamique aux équations

$$4\pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

Dans le cas d'un liquide remplissant un vase simplement connexe, il faut que la composante de la vitesse, normale à la paroi, soit nulle en tout point de cette paroi. Si on appelle

l, m, n les cosinus directeurs de la normale, cette condition s'écrira

$$lu + mv + nw = 0.$$

Pour obtenir le cas qui correspond à celui-là en électrodynamique, il faut supposer que des courants règnent dans l'intérieur de la surface S de la paroi, et que tout l'espace extérieur est occupé par un conducteur parfait. Si on part du repos et que les courants intérieurs augmentent progressivement, il se produira des courants d'induction dans l'espace extérieur. Lorsque le régime permanent est établi, la force électromotrice d'induction disparaît; mais les courants d'induction subsisteront, si le milieu extérieur est un conducteur parfait, c'est-à-dire présente une résistance nulle. En faisant cette hypothèse, le problème d'électrodynamique se confond avec celui de Helmholtz.

En effet, soit un circuit fermé, N le flux de force magnétique qui le traverse, la force électromotrice d'induction est $\frac{dN}{dt}$, et d'après la loi de Ohm :

$$\frac{dN}{dt} = Ri.$$

Si nous supposons le conducteur parfait, $R = 0$, et par suite :

$$\frac{dN}{dt} = 0 \qquad N = \text{const.}$$

Si nous partons du repos, $N = 0$ au début et reste constamment nul, aucune ligne de force ne traversera la surface S, c'est-à-dire que la composante de la force magnétique normale à cette surface est nulle.

56. Cas particulier. — La vitesse est parallèle au plan des xy et ne dépend que de x et de y, alors :

$$w = 0 \qquad \frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = 0.$$

En supposant que ces conditions soient remplies à l'origine des temps, elles le seront toujours : 1° si le liquide est indéfini, parce que tout plan parallèle au plan des xy est un plan de symétrie ; 2° si le liquide remplit un cylindre parallèle à oz, indéfini dans les deux sens. Il en sera de même encore si ce cylindre est limité par deux plans perpendiculaires à l'axe des z. En effet, quand on introduit une cloison dans le liquide, on impose en général au mouvement une condition de plus, à savoir : que la composante de la vitesse normale à la cloison soit nulle en chaque point de celle-ci. Mais, dans le cas qui nous occupe, cette condition était remplie avant qu'on ne mette la cloison et l'existence de cette cloison ne modifie pas le mouvement.

57. D'après les hypothèses que nous avons faites :

$$(6) \qquad \begin{aligned} 2\xi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ 2\eta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ 2\zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

et l'équation de continuité se réduit à :

$$(7) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Tous les tourbillons sont parallèles à oz, tous les tubes tourbillonnaires sont des cylindres ayant oz pour axe.

Suivons un de ces tubes dans son mouvement : je dis que sa section droite demeure constante.

Considérons en effet une portion du liquide limitée par la surface du tube tourbillonnaire et par deux sections droites distantes de h.

Si nous appelons ω l'aire de cette section droite, le volume du liquide est $h\omega$.

Le liquide étant incompressible, ce volume reste constant. D'autre part, le tube de tourbillon se conservant, le volume reste cylindrique. Une molécule qui, à l'origine des temps, est située dans une section droite du tube, y restera toujours, puisque sa vitesse est située dans ce plan : les deux sections qui limitent le cylindre resteront toujours à la même distance. Puisque $h\omega$ et h sont constants, il s'ensuit que ω est constant.

Si, en particulier, nous considérons un tube tourbillonnaire de section infiniment petite $d\omega$, son moment μ est donné par :

$$\mu = 2d\omega . \zeta$$

$d\omega$ doit être constant ; μ aussi ; donc ζ est constant et :

$$\frac{d\zeta}{dt} = 0,$$

$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right.$ et non $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$, car nous suivons une molécule dans son mouvement, c'est-à-dire que nous adoptons les variables de Lagrange).

58. Le cas que nous venons de traiter est celui que Helmholtz appelle le cas des tourbillons rectilignes :

Supposons, en particulier, que nous ayons un tube tourbillonnaire dont la section par le plan des xy soit un cercle de rayon R, à l'intérieur de ce cercle $\zeta =$ const ; à l'extérieur, $\zeta = 0$, et il y a une fonction des vitesses. Prenons comme origine le centre du cercle. Soit M un point quelconque (*fig.* 21). Posons :

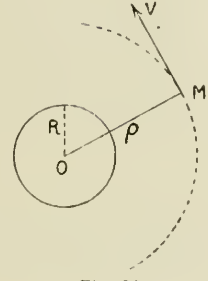


Fig. 21.

$$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Par raison de symétrie, la vitesse V du point M est perpendiculaire au rayon vecteur OM :

$$u = -V\frac{y}{\rho} \qquad v = V\frac{x}{\rho}$$

et V ne dépend que de ρ. Prenons l'intégrale

$$J = \int (udx + vdy) = \int 2\zeta d\omega$$

le long de la circonférence décrite de o comme centre avec le rayon $OM = \rho$: $\int udx + vdy$ représente le travail que produirait sur un point matériel décrivant la circonférence une force représentée par le vecteur (u, v, w) qui est la vitesse ; ce vecteur a une grandeur constante et est dirigé en tous les points suivant la tangente à la circonférence, par conséquent :

$$\int (udx + vdy) = 2\pi\rho V.$$

Nous obtiendrons une autre expression de J au moyen de l'intégrale $\int 2\zeta d\omega$ étendue à toute la surface du cercle OM.

Deux cas sont à distinguer :

1° Le point M peut être à l'intérieur du cercle de rayon R ($\rho < R$) ; ζ est alors constant à l'intérieur du cercle ρ et

$$J = \pi\zeta\rho^2 = 2\pi\rho V.$$

2° Le point M est à l'extérieur du cercle R ($\rho > R$) ; ζ est constant à l'intérieur du cercle R et nul en dehors, donc :

$$J = 2\pi\zeta R^2 = 2\pi\rho V.$$

Nous déduirons de là que :

$$V = \zeta\rho$$

si ρ est plus petit que R,

$$V = \zeta \frac{R^2}{\rho}$$

si ρ est plus grand que R.

Dans ce dernier cas, remarquons que le moment du tube tourbillonnaire est égal à :

$$2\pi\zeta R^2 = 2\pi m,$$

en posant :

$$m = \zeta R^2,$$

et V prend la forme

$$V = \frac{m}{\rho}.$$

Cette formule subsistera si R devient très petit, mais ζ très grand de façon que m reste fini.

59. Ce résultat peut être comparé à d'autres résultats de trois ordres différents.

1° *Comparaison électrodynamique.* — Nous avons vu que la vitesse d'une molécule était représentée par le même vecteur que la force magnétique produite d'après la loi de Biot et Laplace par un courant qui parcourait le tube de tourbillons [**45**].

60. 2° *Comparaison analytique.* — En dehors du tube $\zeta = 0$: d'après cette condition et d'après l'équation de continuité (2) [**57**] :

$$(8) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Ces équations expriment que $v + \sqrt{-1}\,u$ est une fonction de $x + y\sqrt{-1}$. Ce qu'il est aisé de vérifier dans le cas actuel. En effet :

$$v + \sqrt{-1}u = m\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \sqrt{-1}\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{m}{x + \sqrt{-1}y}.$$

Posons :

$$Z = x + \sqrt{-1}\,y,$$

et nous pourrons écrire :

$$(9) \qquad v + \sqrt{-1}\,u = f(Z) = \frac{m}{Z}.$$

61. S'il y a plusieurs tubes tourbillonnaires, le plan des xy coupe chacun d'eux suivant un cercle infiniment petit qu'on peut confondre avec les points a_1, a_2, ... a_n coïncidant avec leur centre. Soient $2\pi m_1$, $2\pi m_2$, ... $2\pi m_n$ les

moments de ces tubes ; si a_1, a_2 ont pour coordonnées a'_1, a''_1, a'_2, a''_2, ... ces points seront les affixes des quantités imaginaires :

$$a_1 = a'_1 + \sqrt{-1}\, a''_1$$
$$a_2 = a'_2 + \sqrt{-1}\, a''_2.$$

Pour obtenir la valeur de $v + \sqrt{-1}u$ correspondant au premier tube a_1, il suffira de prendre la formule (9) en transportant l'origine au point a_1, ... de même pour les autres tubes la valeur totale de $v + \sqrt{-1}\, u$ sera la somme des valeurs partielles ainsi obtenues :

$$v + \sqrt{-1}u = \frac{m_1}{Z - a_1} + \frac{m_2}{Z - a_2} + \dots + \frac{m_n}{Z - a_n} = \sum \frac{m_k}{Z - a_k}.$$

Cette expression est la dérivée de la fonction :

$$\theta(Z) = \sum m_k \log (Z - a_k).$$

Soit M le point qui est l'affixe de Z, ρ_1 la distance Ma_1, ou le module de $Z - a_1$. De même $\rho_2 = Ma_2$, ... $\rho_n = Ma_n$. Soit ω_1 l'argument de $Z - a_1$; c'est l'angle que fait Ma_1 avec Ox... etc.

$$\theta(Z) = \sum m_k \log \rho_k + \sqrt{-1} \sum m_k \omega_k$$

ou en posant :

$$(10) \qquad \psi = \sum m_k \log \rho_k$$

$$(11) \qquad \varphi = \sum m_k \omega_k$$

$$(12) \qquad \theta(Z) = \psi + \sqrt{-1}\, \varphi.$$

Différentions cette identité par rapport à Z, en remarquant que

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = \sqrt{-1}$$

$$\theta'(Z) = v + \sqrt{-1}\, u = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sqrt{-1}\, \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\theta'(Z) = \sqrt{-1}\, v - u = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \sqrt{-1}\, \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

D'où, en identifiant :

$$(13) \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$(14) \qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

D'après les relations (14), on voit que φ est la fonction des vitesses.

62. 3° *Comparaison électrostatique.* — Supposons que de l'électricité soit distribuée uniformément sur une droite indéfinie : l'attraction de cette droite électrisée sur un point extérieur est en raison inverse de la distance.

Remplaçons le tube tourbillonnaire par une distribution d'électricité uniforme sur son axe. L'attraction sur un point M serait dirigée suivant la normale menée de M à l'axe.

La vitesse serait représentée par le même vecteur qu'on aurait fait tourner de 90 degrés. S'il y a plusieurs tubes, on fera la même transformation : on composera les attractions partielles, et la vitesse résultante sera représentée par la résultante de ces attractions quand on l'aura fait tourner de 90 degrés.

On arriverait au même résultat en supposant que les

points a_1, a_2, ... a_n agissent sur le point M en raison inverse de la distance.

Si nous considérons des tubes tourbillonnaires distribués d'une manière quelconque et un point M très éloigné, la distance étant infiniment grande du premier ordre, l'attraction (ou la vitesse) sera infiniment petite du premier ordre.

63. Les courbes φ = const, c'est-à-dire suivant lesquelles l'argument de $e^{\theta(Z)}$ est constant, sont les lignes qui sont normales à la vitesse en chacun de leurs points. En effet, pour ces courbes :

$$d\varphi = udx + vdy = 0.$$

Les courbes ψ = const, c'est-à-dire le long desquelles la partie réelle de θ (Z) ou le module de $e^{\theta(Z)}$ sont constants, sont les lignes de courant. Le long de ces courbes, en effet :

$$vdx - udy = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}.$$

En électrodynamique, les équations φ = const représentent les lignes équipotentielles, et les équations ψ = const, les lignes de force ; c'est l'inverse en électrostatique.

Ces deux systèmes de courbes se coupent à angle droit.

64. Cas particulier de deux tubes tourbillonnaires. — S'il y a seulement deux tubes tourbillonnaires a_1 et a_2, θ (Z) ne renferme que deux termes :

$$\theta(Z) = m_1 \log(Z - a_1) + m_2 \log(Z - a_2).$$

L'équation des lignes de courant sera :

$$m_1 \log \rho_1 + m_2 \log \rho_2 = \text{const.}$$

Si $m_1 = m_2$, l'équation devient

$$\rho_1 \rho_2 = \text{const.}$$

Les lignes de courant sont des ovales de Cassini.

Si $m_1 = - m_2$, les lignes de courant représentées par l'équation

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \text{const}$$

sont des circonférences par rapport auxquelles les points a_1 et a_2 sont conjugués.

CHAPITRE IV

MOUVEMENT DES TUBES TOURBILLONNAIRES

65. Théorème de la conservation du centre de gravité. — Supposons que nous ayons n tubes tourbillonnaires a_1, a_2,... a_n ayant respectivement pour moments $2\pi m_1$, $2\pi m_2$, ... $2\pi m_n$; admettons que les tubes se déplacent, mais que leurs moments restent les mêmes. Si nous regardons m_1, m_2, ... comme des masses, nous pourrons construire leur centre de gravité G. Je dis que, dans le déplacement des tubes, le point G demeure fixe.

Soient x_1, y_1, x_2, y_2, ... x_n, y_n les coordonnées de a_1, a_2, ... a_n, et x_0, y_0 celles de G, ces coordonnées sont liées entre elles par les relations

$$x_0 \sum m_K = \sum m_K x_K$$

$$y_0 \sum m_K = \sum m_K y_K.$$

Si, au lieu de tubes infiniment déliés, il s'agissait de tubes de

dimensions finies, on définirait x_0, y_0, d'une manière analogue.

$$x_0 \int 2\zeta d\omega = \int 2x\zeta d\omega$$

. . . . etc.,

les intégrales étant étendues à tous les éléments $d\omega$ dés sections des différents tubes.

Différentions par rapport à t : puisque nous avons assujetti les moments des tubes à demeurer constants, ζ et ω ne dépendent pas de t [**57**], et :

$$(1) \qquad \frac{dx_0}{dt} \int \zeta d\omega = \int \frac{dx}{dt} \zeta d\omega = \int u\zeta d\omega.$$

Je veux établir que cette dernière intégrale est nulle. Pour cela, je considère l'intégrale :

$$\int [(u^2 - v^2)\, dx + 2uvdy]$$

prise tout le long d'un cercle de rayon très grand. Cette intégrale est nulle. En effet, pour R très grand, u et v sont infiniment petits du premier ordre [**62**] ; u^2, v^2, uv sont infiniment petits du second ordre ; le chemin d'intégration est bien infiniment grand, mais du premier ordre seulement ; l'intégrale est donc négligeable.

D'autre part, transformons cette intégrale d'après la formule (1) du § 8 :

$$\int [(u^2 - v^2)\, dx + 2uvdy] = \int d\omega \left[\frac{\partial\,(u^2 - v^2)}{\partial y} - \frac{2\partial\,(uv)}{\partial x} \right]$$

Effectuons les différentiations :

$$\frac{\partial(u^2 - v^2)}{\partial y} - \frac{2\partial(uv)}{\partial x} = 2u\frac{\partial u}{\partial y} - 2v\frac{\partial v}{\partial y} - 2u\frac{\partial v}{\partial x} - 2v\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= -2v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - 2u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Mais, d'après l'équation de continuité, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

et, d'autre part, par définition :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2\zeta.$$

Donc :

$$\int[(u^2 - v^2)\, dx + 2uvdy] = -4\int u\zeta d\omega.$$

La première intégrale étant nulle, la seconde l'est aussi ; donc :

$$\frac{dx_0}{dt} = 0.$$

De même on démontrerait que :

$$\frac{dy_0}{dt} = 0,$$

et par suite que le point G est fixe.

66. Mouvement du centre de gravité d'un tube tourbillonnaire. — Je vais étudier maintenant le mouvement du centre de gravité de l'un de ces tubes tourbillonnaires. Nous

avons :

$$\frac{dx_0}{dt}\int \zeta d\omega = \int u\zeta d\omega.$$

Posons :

$$u = u' + u'',$$

u' étant la vitesse due au tube considéré s'il existait seul, u'' la vitesse due aux autres.

$$\int u\zeta d\omega = \int u'\zeta d\omega + \int u''\zeta d\omega.$$

L'intégrale $\int u'\zeta d\omega$ est nulle, car, si le premier tube existait seul, son centre de gravité serait fixe.

Par conséquent, si nous voulons déterminer la vitesse du centre de gravité de l'un des tubes tourbillonnaires, il suffira de tenir compte des vitesses communiquées par les autres tourbillons.

67. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les tubes tourbillonnaires. Posons :

$$\rho_{12} = \overline{a_1 a_2}$$
$$\rho_{13} = \overline{a_1 a_3},$$

et d'une manière générale

$$\rho_{iK} = \overline{a_i a_k}.$$

Considérons la fonction :

$$\text{(2)} \qquad P = \sum m_i m_k \log \rho_{i,k}.$$

P est une fonction des $2n$ coordonnées $x_1 y_1, \ldots\ldots, x_n y_n$.

Il faut déterminer $\frac{dx_1}{dt}$ et $\frac{dy_1}{dt}$; nous venons de voir que la vitesse du point x_1, y_1 sera la même que si le tube a_1 était supprimé et si les autres tubes subsistaient seuls; nous aurons donc, d'après les équations (13) [**61**] :

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\partial\psi}{\partial y_1}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1},$$

où

$$\psi = \sum m_k \log \rho_{1,k}.$$

Je dis que ces formules équivalent aux suivantes :

$$m_1 \frac{dx_1}{dt} = -\frac{\partial P_1}{\partial y_1}$$

$$m_1 \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x_1}.$$

En effet, P peut s'écrire :

$$P = m_1 \sum m_k \log \rho_{1k} + \sum m_i m_k \log \rho_{i,k},$$

aucun des indices i et k dans le second terme n'étant égal à 1

D'autre part, les ρ affectés de l'indice 1 sont les seuls qui. dépendent de x_1 et y_1, donc:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = m_1 \frac{\partial(\Sigma m_k \log \rho_{1k})}{\partial x_1} = m_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1},$$

de même :

$$\frac{\partial P}{\partial y_1} = m_1 \frac{\partial\psi}{\partial y_1}.$$

68. D'une manière générale, nous obtiendrons donc les équations suivantes :

$$\text{(I)} \qquad m_k \frac{dx_k}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y_k} \qquad m_k \frac{dy_k}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x_k}$$

Sous cette forme on reconnait les équations canoniques d'Hamilton au facteur m_k près ; pour les ramener exactement à la forme canonique, il suffirait de prendre comme variables :

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ et } m_1 y_1, m_2 y_2, \ldots, m_n y_n.$$

69. **Intégration des équations.** — L'intégration des équations (I) est possible quand il existe seulement trois tubes tourbillonnaires, comme nous allons le montrer.

70. THÉORÈME. — Nous pouvons retrouver d'abord le théorème de la conservation du centre de gravité. En effet, la fonction P dépend seulement des distances ρ et seulement, par conséquent, des différences $x_1 - x_2, \ldots, y_1 - y_2, \ldots$, etc. Donc :

$$\frac{\partial P}{\partial y_1} + \frac{\partial P}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial P}{\partial y_n} = 0,$$

soit :

$$\text{(3)} \qquad \sum \frac{\partial P}{\partial y_k} = 0 \qquad \text{ou :} \qquad \sum m_k \frac{dx_k}{dt} = 0$$

$$\sum m_k x_k = \text{const.}$$

De même :

$$\sum m_k y_k = \text{const.}$$

Le centre de gravité du système reste donc fixe.

71. Théorème des forces vives. — Multiplions les deux membres des équations (1) respectivement par $dx_k\ dy_k$; opérons de même sur toutes les équations analogues et ajoutons, il vient :

$$\sum \frac{dP}{dx_k} dx_k + \sum \frac{dP}{dy_k} dy_k = 0,$$

ou :

$$dP = 0.$$

Donc :

$$P = \text{const.} \tag{4}$$

Cette relation exprime le théorème des forces vives. Ceci ne s'aperçoit pas immédiatement, et nous avons à lever plusieurs difficultés. D'après nos hypothèses, en effet, la force vive serait infinie, pour trois raisons :

1° Le liquide est indéfini dans tous les sens. Mais nous avons vu qu'en introduisant deux cloisons planes solides, perpendiculaires à l'axe Oz, on ne modifie pas le mouvement. Nous pouvons donc nous borner à considérer le liquide compris entre ces deux plans.

2° Même avec cette restriction, la force vive serait encore infinie, puisque le liquide s'étend indéfiniment dans le plan des xy. Les composantes u et v de la vitesse tendent vers 0, quand on s'éloigne indéfiniment, sur une circonférence dont le rayon R est regardé comme un infiniment grand du premier ordre; u et v sont infiniment petits du premier ordre [**62**] : la force vive élémentaire serait infiniment petite du second ordre, mais la surface du cercle étant un infiniment grand du second ordre, la force vive totale serait infinie. En appelant $2\pi M$ la somme des moments de tous les tubes tourbillon-

naires, la vitesse sur la circonférence de rayon R a pour valeur :

$$V = \frac{M}{R}$$

aux infiniment petits près du second ordre.

Supposons que M soit nul : alors la vitesse (u, v) est infiniment petite du second ordre ; la force vive élémentaire est du quatrième ordre, et la force vive totale sera finie ;

3° Ceci suppose encore que les tubes tourbillonnaires ne sont pas infiniment déliés ; sans quoi la vitesse au voisinage de ces tubes serait infiniment grande du premier ordre et la force vive infiniment grande du second.

72. Nous admettrons que la force vive est finie. Il suffit pour cela, comme nous venons de le voir : 1° que le liquide soit limité par deux plans parallèles perpendiculaires à oz ; 2° que la somme des moments de tous les tubes soit nulle ; 3° que les tubes aient une section finie.

Considérons deux petits éléments de surface $d\omega$ et $d\omega'$ correspondant aux valeurs ζ et ζ' du tourbillon. Soient $2\pi dm$, $2\pi dm'$ les moments des tubes élémentaires limités à ces éléments :

$$2\zeta d\omega = 2\pi dm$$
$$2\zeta' d\omega' = 2\pi dm'.$$

Le terme de P correspondant à ces éléments sera :

$$dm dm' \log \rho$$

en appelant ρ la distance des deux éléments, et :

$$P = \int\int dm dm' \log \rho,$$

ou :

$$(5) \qquad P = \iint \frac{\zeta\zeta' d\omega d\omega' \log \rho}{\pi^2},$$

l'intégrale étant calculée en prenant toutes les combinaisons deux à deux des éléments $d\omega$ et $d\omega'$, chacune étant prise une seule fois. Soient x, y et x', y' les coordonnées des centres de gravité des éléments $d\omega$ et $d\omega'$; la valeur de ψ au point (x, y) sera :

$$\psi = \int dm' \log \rho = \int \frac{\zeta' d\omega' \log \rho}{\pi}.$$

D'autre part :

$$2\pi^2 P = \iint \zeta\zeta' d\omega d\omega' \log \rho,$$

l'intégrale étant étendue à *toutes* les combinaisons $(d\omega, d\omega')$, chacune d'elles étant ainsi prise deux fois, donc :

$$(6) \qquad 2\pi^2 P = \pi \int \zeta\psi d\omega.$$

73. Nous aurions pu écrire cette formule immédiatement, en nous reportant à la comparaison électrostatique [**62**].

Si, en effet, nous considérons dm, dm' comme des masses électriques répandues sur les éléments $d\omega$, $d\omega'$, la fonction ψ représentera, à un facteur constant près, le potentiel électrostatique et P représentera l'énergie électrostatique. On sait qu'entre ces deux fonctions existe une relation de la forme (6).

74. Remplaçons 2ζ par sa valeur dans l'expression de P, il vient :

$$4\pi P = \int 2\zeta\psi d\omega = \int \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right) \psi d\omega.$$

Considérons l'intégrale :

$$(7) \qquad \int (vdy + udx)\,\psi$$

Prise le long d'un cercle de rayon très grand, cette intégrale est nulle, puisque nous avons supposé [**72**] que la somme algébrique des moments de tous les tubes est nulle ; il arrive alors que u et v sont du second ordre, la longueur de la circonférence étant infiniment grande du premier ordre seulement. Transformons-la par le théorème de Stokes :

$$\int \left(\frac{d\,(\psi v)}{dx} - \frac{d\,(\psi u)}{dy} \right) d\omega = 0.$$

ou en effectuant les différentiations :

$$\int \psi \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) d\omega + \int \left(v\,\frac{d\psi}{dx} - u\,\frac{d\psi}{dy} \right) d\omega = 0.$$

Or :

$$2\zeta = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = v \qquad \frac{d\psi}{dy} = -u.$$

Donc : ·

$$(8) \qquad 4\pi P + \int (v^2 + u^2)\, d\omega = 0.$$

P représente donc, à un facteur constant près, la force vive $\int (v^2 + u^2)\, d\omega$ et par conséquent cette force vive est constante.

75. Théorème. — Le moment d'inertie des masses m par rapport à l'axe Oz est une constante.

Imprimons à tout le système une rotation infiniment petite ε autour de l'axe des z. En négligeant les infiniment petits du second ordre, les coordonnées x_i et y_i deviennent :

$$x_i - y_i\varepsilon \qquad y_i + x_i\varepsilon$$

P, qui ne dépend [**71**] que des distances ρ_{ik}, ne changera pas.

Ecrivons donc que $dP = 0$, il viendra :

$$\sum - \frac{dP_i}{dx_i} y_i\varepsilon + \sum \frac{dP}{dy_i} x_i\varepsilon = 0$$

ou

$$\sum \left(x_i \frac{dP}{dy_i} - y_i \frac{dP}{dx_i}\right) = 0.$$

Dans la comparaison électrostatique, cette équation signifie que la somme des moments des attractions qu'exercent l'une sur l'autre les droites électrisées, prise par rapport à l'axe des z, est nulle. Ceci est évident puisque les attractions sont deux à deux égales et de signes contraires.

Si nous remplaçons $\frac{dP}{dy_i}$ et $\frac{dP}{dx_i}$ par leurs valeurs $m_i \frac{dx_i}{dt}$ et $-m_i \frac{dy_i}{dt}$, on trouve :

$$\sum m_i \left(x_i \frac{dx_i}{dt} + y_i \frac{dy_i}{dt}\right) = 0.$$

ou en intégrant :

$$\sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \text{const.} \tag{9}$$

76. Théorème. — La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe des z est constante. Si f est une fonction homogène du premier degré, le théorème d'Euler donne:

$$x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy} + z \frac{df}{dz} = f.$$

ou :

$$\sum x \frac{df}{dx} = f.$$

ou enfin :

$$\sum x \frac{d \log f}{dx} = 1.$$

Appliquons à la fonction P. ρ_{ik} est une fonction homogène du premier degré de x_i, y_i ; et x_k, y_k, les autres coordonnées, n'y entrent pas. Par conséquent

$$x_i \frac{d \log \rho_{i,k}}{dx_i} + y_i \frac{d \log \rho_{i,k}}{dy_i} + \cdots\cdots = 1,$$

ou en multipliant tous les termes par $m_i m_k$:

$$\sum \left(x_p \frac{d m_i m_k \log \rho_{i,k}}{dx_p} + y_p \frac{d m_i m_k \log \rho_{ik}}{dy_p} \right) = m_i m_k$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs de p, de 1 à n. Ensuite il faut prendre toutes les combinaisons possibles de i et k, et faire la somme ; ce qui donne:

$$\sum \left(x_p \frac{dP}{dx_p} + y_p \frac{dP}{dy_p} \right) = \sum m_i m_k.$$

D'après les équations (1) [68], cette relation équivaut à :

$$(10) \qquad \sum m_p \left(x_p \frac{dy_p}{dt} - y_p \frac{dx_p}{dt} \right) = \sum m_i m_k.$$

Le premier membre est la somme des moments des quantités de mouvement, le second est une constante.

77. Nous avons ainsi déterminé trois intégrales de nos équations différentielles (1); ces propriétés des équations nous permettront de les intégrer par des quadratures quand il y aura seulement trois tubes tourbillonnaires.

En effet, nos équations ont la forme des équations canoniques de Hamilton, lesquelles s'intègrent par quadratures, quand elles renferment $2n$ variables, et qu'on connaît n intégrales particulières. Or, quand il existe trois tubes tourbillonnaires, les équations renferment six variables x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, et nous avons trouvé trois intégrales particulières.

CHAPITRE V

CAS DE DEUX TUBES TOURBILLONNAIRES, MÉTHODE DES IMAGES

78. Soient deux tubes tourbillonnaires a_1, a_2, dont les moments soient $2\pi m_1$ et $2\pi m_2$. Leur centre de gravité G sera situé sur la droite $a_1 a_2$ et déterminé par la condition

$$\frac{Ga_1}{Ga_2} = -\frac{m_2}{m_1}$$

(les segments Ga_1, Ga_2 étant pris avec leur signe).

D'après ce que nous savons [**65**], le point G reste fixe. La vitesse du point a_2 est la même que si le tourbillon a_1 existait seul, soit :

$$\frac{m_1}{a_1 a_2}$$

et elle est dirigée perpendiculairement à $a_1 a_2$.

Le point G étant fixe, les trois points a_1, G, a_2 étant toujours en ligne droite, et la vitesse du point a_2 constamment normale au rayon vecteur Ga_2, la trajectoire du point a_2 est une cir-

conférence ayant son centre en G, et dont le rayon est Ga_2. La trajectoire du point a_1 sera de même une circonférence ayant son centre en G, et un rayon égal à Ga_1. Comme la distance a_1a_2 reste constante, les vitesses des deux points qui sont égales respectivement à $\frac{m_1}{a_1a_2}$ et $\frac{m_2}{a_1a_2}$ seront aussi constantes.

79. Supposons que m_1 et m_2 soient de signe contraire ; le point G sera en dehors de a_1a_2 et encore déterminé par la condition :

$$\frac{\overline{Ga_1}}{\overline{Ga_2}} = -\frac{m_2}{m_1}.$$

En particulier si $m_1 = - m_2$, le point G est rejeté à l'infini, et les trajectoires des points a_1 et a_2 se réduisent à des droites perpendiculaires à a_1a_2.

Les deux tubes se déplacent avec la même vitesse :

$$\frac{m_1}{a_1a_2} = \text{V}.$$

Si nous considérons le point M, milieu de a_1a_2, la vitesse communiquée à ce point par le tourbillon a_1 est

$$\frac{m_1}{a\text{M}_1} = 2\frac{m_1}{a_1a_2} = 2\text{V}.$$

Le tourbillon a_2 lui communique de même une vitesse

$$\frac{m_2}{\text{M}a_2} = \frac{m_1}{a_1\text{M}} = 2\text{V}.$$

La vitesse résultante du point M est donc égale à quatre fois la vitesse commune des centres des deux tubes tourbillonnaires.

80. Liquide renfermé dans un vase cylindrique. — Imaginons que le liquide soit renfermé dans un vase ayant la forme d'un cylindre dont les génératrices soient parallèles à l'axe des z. Dans ce vase se trouve un tube tourbillonnaire, formé d'un cylindre infiniment délié, aussi parallèle à oz.

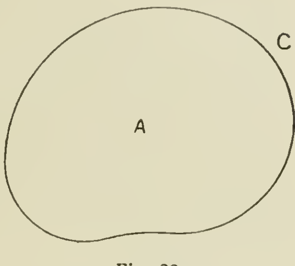


Fig. 22.

Soient C (*fig.* 22) la section droite du vase dans le plan des xy, et A, le pointa uquel se réduit la section du tube tourbillonnaire.

Les composantes u et v de la vitesse doivent être finies et continues dans tout l'intérieur du vase, sauf au point A.

L'équation de continuité se réduit à

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Comme le tourbillon est partout nul, sauf en A :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Nous avons vu que dans ces conditions [**33**] il existait une fonction des vitesses φ telle que :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

l'équation de continuité devenant :

$$\Delta \varphi = 0.$$

Dans le cas actuel, la condition aux limites est que le con-

tour C de la section du vase soit une ligne de courant, c'est-à-dire qu'en tout point de cette courbe la vitesse lui soit tangente. $v + \sqrt{-1}\, u$ doit être une fonction de $x + \sqrt{-1}\, y$ dans l'intérieur de C. Cette fonction doit se comporter régulièrement, sauf au point A où elle devient infinie.

La détermination de u et de v peut se faire par deux méthodes :

1° La méthode des images, qui s'applique seulement dans un certain nombre de cas simples ;

2° La méthode des représentations conformes, qui est beaucoup plus générale.

81. Méthode des images. Supposons que le vase ait la forme d'un cylindre circulaire, parallèle à Oz et de rayon R. Soit C la trace de ce cylindre sur le plan des xy. Soit A la trace d'un tube tourbillonnaire de moment 2π (*fig.* 23).

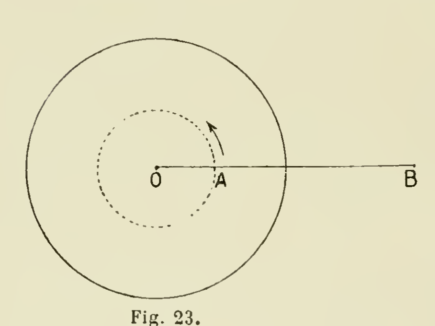


Fig. 23.

Joignons le centre O du cercle au point A, et prenons sur OA le point B défini par la condition :

$$OA.OB = R^2.$$

Le tube tourbillonnaire parallèle à oz, dont la trace est B et dont le moment est égal à 2π, s'appelle l'image de A par rapport au cercle C.

Si le liquide était indéfini et que les tubes A et B existassent en réalité simultanément, les lignes de courant seraient des

circonférences par rapport auxquelles B et A seraient conjugués [**64**].

En particulier, la circonférence C serait une ligne de courant ; la composante de la vitesse normale à cette courbe, et plus généralement normale au cylindre droit, ayant C pour base, serait nulle. L'introduction d'une paroi solide, ayant la forme de cette surface cylindrique, ne modifiera donc pas le mouvement à l'intérieur de cette surface.

Le centre de gravité A du tube se déplace avec la même vitesse que si le tube B existait seul, le liquide étant indéfini. $\frac{AB}{2\pi}$ serait la grandeur absolue de cette vitesse, dirigée constamment suivant la perpendiculaire au rayon vecteur OAB. Le point A décrira donc une circonférence concentrique à C.

Cette trajectoire n'est pas la même que si la cloison C n'existait pas, quoique la vitesse soit la même. En effet, si le liquide était indéfini, le point A décrirait une droite perpendiculaire à OA [**79**].

82. Si le rayon de la circonférence C croît indéfiniment, cette courbe finit par se réduire à une droite, B est symétrique de A par rapport à cette droite ou, pour mieux dire, au plan C, auquel s'est réduit le cylindre. La trajectoire de A, normale à AB, est une droite parallèle à la trace du plan C (*fig.* 24).

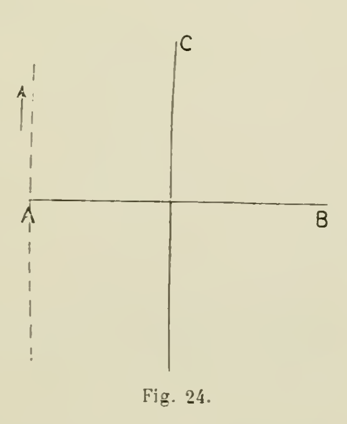


Fig. 24.

83. Liquide renfermé entre deux cylindres de révolution concentriques. — Soient C et C′ les traces sur le

plan des xy de deux cylindres de révolution dont l'axe est Oz ; A_0 la trace sur ce plan d'un tube tourbillonnaire infiniment délié, de moment 2π (*fig.* 25).

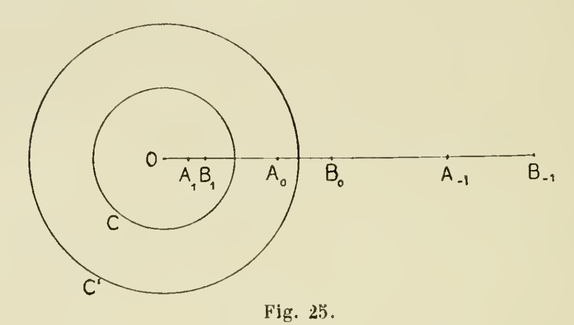


Fig. 25.

Soient B_0 l'image de A_0 par rapport à C' ; B_1, l'image de A_0 par rapport à C ; A_{-1}, l'image de B_1 par rapport à C', etc. ; de sorte que nous ayons une infinité de couples de points conjugués par rapport à C et C', comme l'indique le tableau suivant :

CONJUGUÉS

Par rapport à C'.	Par rapport à C.
A_0, B_0	B_1, A_0
A_{-1}, B_1	B_0, A_1
A_1, B_{-1}	B_2, A_{-1}
. . . .	. . . .
A_i, B_{-i}	B_{-i}, A_i

les indices variant de $-\infty$ à $+\infty$. Considérons chacun des points A comme la trace d'un tube tourbillonnaire de moments 2π, et chacun des points B comme la trace d'un tube de moment -2π. Ces tubes seront conjugués.

Supposons que tous ces tubes existent réellement, et que le liquide soit indéfini ; la vitesse du liquide sera la même que si

les cloisons existaient avec le seul tube tourbillonnaire A. Nous calculerons cette vitesse en faisant la somme des vitesses dues à chaque tube séparément. Nous obtiendrons ainsi une série, et il s'agit de savoir si cette série est convergente.

D'après les relations :

$$OA_0.OB_0 = R'^2$$
$$OA_1.OB_1 = R^2$$

on a :

$$\frac{OB_1}{OB_0} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2.$$

De même :

$$\frac{OB_2}{OB_1} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2, \text{ etc.}$$

D'une façon générale :

$$(1) \qquad OB_n = OB_0 \left(\frac{R}{R'}\right)^{2n}.$$

On démontrerait de la même manière que :

$$(2) \qquad OA_n = OA_0 \left(\frac{R}{R'}\right)^{2n}.$$

Groupons les termes de la série comme il suit :

1° Les termes relatifs aux tubes A affectés d'indices négatifs; la somme de ces termes forme une série. Quand l'indice n devient très grand, le point A_{-n} devient très éloigné, la vitesse communiquée à un point M par ce tube devient très petite, de l'ordre de $\frac{1}{MA_{-n}}$. Si le point A_n est très éloigné, la différence OA_n — MA_{-n} est négligeable et la vitesse est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{OA_{-n}}$. La distance OA_{-n} croît suivant

une progression géométrique de raison $\left(\frac{R'}{R}\right)^2$. La série $\frac{1}{OA_{-n}}$ est donc convergente.

2° Les termes relatifs aux tubes B affectés d'indices négatifs. Un raisonnement identique au précédent fait voir que la série $\frac{1}{OB_{-n}}$ est convergente.

3° Groupons deux à deux les tubes affectés d'indices positifs :

$$A_0, B_0 - A_1, B_1 - \ldots\ldots A_n, B_n.$$

Retranchons membre à membre l'égalité (2) de l'égalité (1), il vient :

$$A_nB_n = A_0B_0 \left(\frac{R}{R'}\right)^{2n}. \tag{3}$$

Les tubes A_0, B_0, ..., A_n, B_n ont des moments deux à deux égaux et de signe contraire. La somme géométrique des vitesses dues à un groupe (A_n, B_n) est du même ordre de grandeur que A_nB_n ; elle décroît donc suivant une progression géométrique de raison $\left(\frac{R'}{R}\right)^2$ et tend vers 0 quand n augmente indéfiniment ; la série est donc convergente.

Les trois séries partielles étant convergentes, il en sera de même de la série totale.

84. De plus, je dis que les circonférences C et C′ sont des lignes de courant. Cela est évident ; en effet, tous les tubes sont conjugués deux à deux par rapport au cercle C et au cercle C′. Assemblons les tubes par groupes de deux conjugués par rapport à C ; la vitesse due à chaque groupe sera tangente à C. la vitesse totale sera par conséquent tangente elle-même à C. Démonstration analogue pour C′.

85. La solution que nous venons de trouver n'est pas la seule, car le vase n'est pas simplement connexe. Pour obtenir la solution la plus générale, il suffit d'ajouter un tube ayant pour trace le centre O et un moment quelconque. En effet, la vitesse due à ce tube est tangente en particulier à C et à C′, puisque toutes les lignes de courant dues à ce tube sont des circonférences ayant le point O pour centre.

La trajectoire de A_0 est évidemment une circonférence de centre O, la vitesse due à tous les tubes étant constamment normale au rayon vecteur OA_0.

86. Liquide compris entre deux plans rectangulaires. — Prenons les deux plans qui limitent le liquide pour plan des xz et des yz. Soient Ox et Oy leurs traces ; A_0, celle d'un tube tourbillonnaire infiniment délié de moment 2π (*fig.* 26).

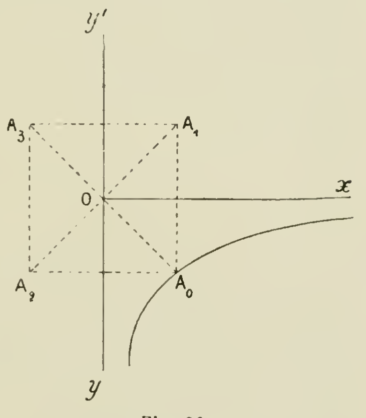


Fig. 26.

Prenons les symétriques de A_0 par rapport à Ox et Oy en A_1 et en A_2, puis les symétriques de A_1 par rapport à Oy et de A_2 par rapport à Ox ; ces deux points se confondent en A_3 symétrique de A_0 par rapport au point O.

Attribuons les moments :

$$\begin{aligned} &+ 2\pi \text{ à } A_0 \\ &- 2\pi \text{ à } A_1 \\ &- 2\pi \text{ à } A_2 \\ &+ 2\pi \text{ à } A_3 \end{aligned}$$

Supprimons les cloisons et imaginons que les quatre tubes A_0, A_1, A_2, A_3 existent simultanément. Les axes ox et oy seront des lignes de courants puisque les tubes sont conjugués deux à deux par rapport à ces axes ; et l'introduction des cloisons dans les plans des xz et des yz ne modifiera pas le mouvement.

Quelle sera la trajectoire du point A_0. Nous avons défini [**72**] la fonction P, et nous avons vu que, dans le cas d'un liquide indéfini, cette fonction est proportionnelle à la force vive : si donc les cloisons étaient supprimées et que les quatre tubes existassent réellement, la force vive totale du liquide serait égale à P à un facteur constant près. Mais la force vive du liquide compris entre les deux plans est le quart de la force vive totale, qu'on obtiendrait en supprimant les cloisons et donnant une existence réelle aux tubes A_1, A_2, A_3.

Donc : La force vive du liquide *réel* compris entre les deux plans est encore proportionnelle à P, et l'équation des forces vives s'écrit :

$$P = \text{const.}$$

Or :

$$P = \sum m_i m_k \log \rho_{ik}$$

Dans le cas actuel $m_i = \pm 1$, et il y a six termes, correspondant à six distances ρ qui sont égales deux à deux. Pour les termes qui correspondent à deux sommets opposés du rectangle, le produit $m_i m_k = +1$; pour les quatre autres termes, $m_i m_k = -1$. Donc :

$$P = 2 \log A_0A_3 - 2 \log A_1A_0 - 2 \log A_2A_0 = \text{const.}$$

$$A_0A_3 = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$A_1A_0 = 2y$$

$$A_2A_0 = 2x.$$

L'équation de la trajectoire du point A_0 sera donc :

$$2 \log 2 \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \log 4xy = \text{const.}$$

ou :

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} = \text{const.}$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \text{const.}$$

Donc la trajectoire du point A_0 dans le mouvement étudié est représentée par cette courbe, qui est asymptote aux deux axes.

CHAPITRE VI

MÉTHODE DE LA REPRÉSENTATION CONFORME

87. Définition de la représentation conforme. — Soient deux aires planes simplement connexes ; deux points M (x, y) et M′ (x', y') de ces aires. Supposons qu'on ait établi entre M et M′ une correspondance telle que x' et y' soient fonction de x et de y : à chaque point M correspond un seul point M′, et réciproquement. Si x' et y' sont des fonctions continues de x et de y, M′ décrira une courbe quand M décrit une courbe, et inversement. Aux différents points du contour de la première aire correspondront les points du contour de la deuxième. En choisissant convenablement les fonctions x' et y', on peut conserver les angles, c'est-à-dire obtenir que les représentations des courbes se coupent sous le même angle que les courbes elles-mêmes. On dit alors que la représentation est conforme. Deux triangles infiniment petits correspondants sont alors semblables ; et aussi deux figures infiniment petites correspondantes quelconques, puisqu'on peut les décomposer en triangles semblables deux à deux.

88. Considérons la variable complexe $x' + \sqrt{-1}y'$: il peut arriver que $x' + \sqrt{-1}y'$ soit fonction de $x + \sqrt{-1}\, y$. Dans ce cas les angles sont conservés et réciproquement. En effet, les conditions qui expriment ce fait sont :

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{dx'}{dx} &= \frac{dy'}{dy} \\ \frac{dx'}{dy} &= -\frac{dy'}{dx}. \end{aligned}$$

Peut-on de cette manière faire la représentation conforme d'une courbe sur elle-même ?

Soit, par exemple, une circonférence :

1° On peut la faire tourner autour de son centre ;

2° Considérons un point M dans l'intérieur du cercle ; soient (x,y) ses coordonnées : je puis y faire correspondre $M'(x', y')$ également intérieur à la circonférence, suivant une représentation conforme, de manière qu'au centre O corresponde un point O′ quelconque à l'intérieur du cercle.

En effet, prenons le rayon de la circonférence pour unité. M a pour affixe la quantité imaginaire $x + \sqrt{-1}y$, et l'équation de la circonférence est :

$$| x + \sqrt{-1}y | = \text{const} = 1.$$

Soit $a + \sqrt{-1}b$ l'affixe de O′. Considérons l'expression :

$$x' + \sqrt{-1}y' = \frac{\alpha\,(x + \sqrt{-1}y) + \beta}{\gamma\,(x + \sqrt{-1}y) + \delta}$$

Je puis choisir : α, β, γ, δ de façon que M′ décrive la circonférence en même temps que M, c'est-à-dire que le module

de $x' + \sqrt{-1}y'$ soit égal à l'unité en même temps que celui de $x + \sqrt{-1}y$.

Le point O″ conjugué de O′ a pour affixe : $\dfrac{1}{a - \sqrt{-1}b}$; faisons :

$$x' + \sqrt{-1}y' = \frac{x + \sqrt{-1}y - (a + \sqrt{-1}b)}{x + \sqrt{-1}y - \dfrac{1}{a - \sqrt{-1}b}} \frac{1}{a - \sqrt{-1}b}$$

La condition :

$$| x + \sqrt{-1}y | = 1$$

équivaut à :

$$x^2 + y^2 = 1,$$

ou :

$$\frac{1}{x - \sqrt{-1}y} = x + \sqrt{-1}y.$$

Donc, pour les points de la circonférence (x, y), nous pourrons écrire :

$$x' + \sqrt{-1}y' = \frac{x + \sqrt{-1}y - (a + \sqrt{-1}b)}{\dfrac{1}{x - \sqrt{-1}y} - \dfrac{1}{a - \sqrt{-1}b}} \frac{1}{a - \sqrt{-1}b}$$

ou :

$$x' + \sqrt{-1}y' = \frac{x + \sqrt{-1}y - (a + \sqrt{-1}b)}{x - \sqrt{-1}y - (a - \sqrt{-1}b)} (x - \sqrt{-1}y) \frac{a + \sqrt{-1}b}{a - \sqrt{-1}b}.$$

Les deux fractions ont pour module l'unité, puisque leurs deux termes sont conjugués. Celui de $x - \sqrt{-1}y$ est égal à l'unité. Le module de $x' + \sqrt{-1}y'$ se réduit donc à l'unité.

Si on fait :

$$x + \sqrt{-1}y = a + \sqrt{-1}b,$$

on a :

$$x' + \sqrt{-1}y' = 0,$$

de sorte que le point O est le transformé du point O′, qui a été choisi arbitrairement à l'intérieur de la circonférence.

89. M. Schwartz a donné le moyen de faire la représentation conforme d'une aire plane quelconque sur un cercle ; mais les procédés sont en général assez compliqués, sauf dans quelques cas relativement simples.

Supposons que nous sachions faire la représentation conforme d'une aire A sur un cercle de telle manière qu'au point M de l'aire A corresponde un point M′ du cercle, et qu'au point P_0 de l'aire A corresponde le centre du cercle. Je dis qu'on pourra aussi trouver une autre représentation de l'aire A sur le même cercle, qui sera telle qu'un autre point P de l'aire A vienne au centre du cercle. Soit, en effet, P′ le point du cercle correspondant à P dans la première représentation. Faisons la représentation conforme du cercle sur lui-même, de manière qu'au point M′ corresponde le point M″, et qu'au point P′ corresponde le centre du cercle. Cela est toujours possible [**88**].

Nous aurons encore une représentation conforme de l'aire primitive A ; en effet, soient (x, y), (x', y') et (x'', y'') les coordonnées des points M, M′ et M″ ; x'' et y'' sont fonctions de (x', y') et, par suite, fonctions de (x, y) comme x' et y' eux-mêmes. D'autre part, les angles n'ont pas été altérés puisque les deux représentations faites successivement sont toutes deux des représentations conformes. Enfin, si le point M vient en P, le point M′ vient en P′, et le point M″ au centre du cercle.

90. Problème de Helmholtz (Application au). — Suppo-

sons que la section du vase soit une courbe C; soit A_0 la trace d'un tube tourbillonnaire ayant un moment égal à 2π. Comme nous l'avons établi [**60**] :

$$v + \sqrt{-1}u$$

est une fonction de $x + \sqrt{-1}y$.

Je puis donc poser :

$$(2) \qquad v + \sqrt{-1}u = \frac{d\,(\psi + \sqrt{-1}\varphi)}{d\,(x + \sqrt{-1}y)},$$

d'où :

$$(3) \qquad \begin{aligned} v &= -\frac{d\psi}{dy} = \frac{d\varphi}{dx} \\ u &= \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\varphi}{dy}. \end{aligned}$$

Posons :

$$x' + \sqrt{-1}y' = e^{\psi + \sqrt{-1}\varphi};$$

Cette expression sera une fonction de $x + \sqrt{-1}\,y$. Les fonctions u et v se comportent régulièrement à l'intérieur de la courbe C, sauf au point A_0 où u et v deviennent infiniment grands du premier ordre.

J'ajoute que la différence

$$v + \sqrt{-1}u - \frac{1}{x + \sqrt{-1}y}$$

reste finie. La fonction

$$\psi + \sqrt{-1}\varphi - \log\,(x + \sqrt{-1}y) = f_1\,(x + \sqrt{-1}\,y)$$

reste aussi finie, même au point A_0. Par conséquent :

$$e^{\psi + \sqrt{-1}\varphi} = (x + \sqrt{-1}y)\,e^{f_1}$$

n'admettra pas de point singulier, puisque les deux facteurs se comportent régulièrement au point A_0. Le long de la courbe C, qui est une ligne de courant, $\psi =$ const. Or e^ψ est le module de $e^{\psi+\sqrt{-1}\varphi}$ ou $x' + \sqrt{-1}y'$. Donc le long de C le module de $x' + \sqrt{-1}y'$ est constant :

$$(1) \qquad x'^2 + y'^2 = \text{const.}$$

Considérons un point M (x, y) à l'intérieur de la courbe C ; quand ce point parcourra toute l'aire limitée par C, le point (x', y') parcourra l'aire limitée par la courbe correspondant à C ; or, d'après l'équation (1), cette courbe est une circonférence dont le centre correspond à A_0. La représentation est conforme puisque $x' + \sqrt{-1}y'$ est fonction de $x + \sqrt{-1}y$.

91. *Réciproquement*, si on sait faire la représentation conforme de l'aire C, on pourra résoudre le problème d'Helmholtz. On connaîtra alors $x' + \sqrt{-1}y'$, on posera :

$$e^{\psi+\sqrt{-1}\varphi} = x' + \sqrt{-1}y'$$

$$u = \frac{d\psi}{dx} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot v = -\frac{d\psi}{dy}.$$

φ sera la fonction des vitesses (en dehors du tube A_0).

92. Pour déterminer la trajectoire du centre de gravité A_0 du tube, il est plus commode d'avoir recours à la comparaison électrostatique.

Considérons un champ électrique déterminé par un certain nombre de droites perpendiculaires au plan des xy, de longueur $2l$ très grande par rapport à leurs distances, et électrisées uniformément ; nous supposerons que les extrémités de toutes ces droites sont dans les deux plans $z = l$ et $z = -l$.

Soient (*fig.* 27) AB une de ces droites ; P, un point quelconque sur cette droite, ayant pour coordonnées x', y', z' ; P′, un point de la droite infiniment voisin dont les coordonnées sont x', y', $z' + dz'$.

Si δ est la charge par unité de longueur, la charge de PP′ sera $\delta dz'$ et le potentiel de la droite AB en un point tel que M (x, y, z) sera :

$$V = \int_{-l}^{+l} \frac{\delta dz'}{MP}.$$

Fig. 27.

Soit ρ la distance du point M à la droite

$$\overline{MP}^2 = \rho^2 + (z - z')^2$$

$$V = \int_{-l}^{+l} \frac{\delta dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}}.$$

Posons :

$$z' = \zeta + z \qquad \alpha = l - z \qquad \beta = l + z$$

$$V = \int_{-\beta}^{\alpha} \frac{\delta d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}}$$

$$V = \delta \log \frac{\alpha + \sqrt{\rho^2 + \alpha^2}}{-\beta + \sqrt{\rho^2 + \beta^2}} = \delta \log \frac{(\alpha + \sqrt{\rho^2 + \alpha^2})(-\beta + \sqrt{\rho^2 + \beta^2})}{\rho^2},$$

ou, comme α et β sont très grands vis-à-vis de ρ, on a approximativement :

$$V = \delta \log \frac{4\alpha\beta}{\rho^2} = 2\delta \log \frac{2\sqrt{l^2 - z^2}}{\rho}.$$

93. Si les droites électrisées sont en nombre quelconque :

$$V = \sum 2\delta_i \log \frac{2\sqrt{l^2 - z^2}}{\rho_i}$$

ou

$$(4) \quad V = -2\sum \delta_i \log \rho_i + 2 \log 2\sqrt{l^2 - z^2} \sum \delta_i.$$

Si la somme des charges est nulle :

$$\sum \delta_i = 0.$$

alors le potentiel

$$(5) \qquad V = -2\sum \delta_i \log \rho_i$$

ne dépend plus de l ni de z.

La composante de la force électromotrice parallèle à Oz, $\frac{dV}{dz}$, est nulle.

94. Application à l'hydrodynamique. — Soient C la section du vase, Ω celle du tube tourbillonnaire (*fig.* 28). Le tourbillon ζ varie d'une manière quelconque à l'intérieur de Ω et est nul à l'extérieur. Soit 2π le moment total du tube :

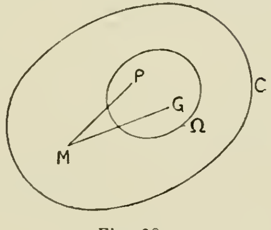


Fig. 28.

$$(6) \qquad \int 2\zeta d\omega = 2\pi.$$

Les équations à satisfaire sont : l'équation de continuité

$$(7) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0,$$

et l'équation

$$(8) \qquad \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = 2\zeta.$$

La relation (1) exprime que u et v sont les dérivées d'une même fonction $\psi\ (x, y)$

$$u = -\frac{d\psi}{dy} \qquad v = \frac{d\psi}{dx}$$

$$vdx - udy = d\psi.$$

Substituons ces valeurs de u et v dans (2), il vient :

$$\Delta\psi = 2\zeta.$$

Par conséquent à l'extérieur de Ω

$$\Delta\psi = 0,$$

et il y a une fonction des vitesses. La courbe C doit être une ligne de courant, c'est-à-dire que le long de cette ligne

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v},$$

ou

$$\frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dy}dy = d\psi = 0.$$

Le long de C on a donc

$$\psi = \text{const.}$$

Comme ψ n'est défini que par ses dérivées, on peut toujours s'arranger de manière que cette constante soit nulle.

95. Remplaçons maintenant dans le tube Ω chaque tube infiniment délié par une droite électrisée de longueur $2l$, la

densité sur cette droite étant proportionnelle à ζ. Supposons l'espace compris entre Ω et C rempli par un diélectrique, et à l'extérieur de C un conducteur limité intérieurement par le cylindre qui admet cette courbe comme section droite. Si ce conducteur est en communication avec le sol, son potentiel ψ_1 sera nul, et tout le long de C on aura $\psi_1 = 0$.

Mais il se répandra sur C une couche d'électricité, formant une charge égale et de signe contraire à celle de Ω (théorème de Faraday). En choisissant convenablement le facteur de proportionnalité qui lie la densité à ζ, le potentiel sera représenté par la fonction ψ_1, que nous avons précédemment définie [**94**].

A l'intérieur de C, dans le diélectrique:

$$\Delta\psi_1 = 0.$$

Dans l'intérieur du cylindre Ω,

$$\Delta\psi_1 = -4\pi\mu_1''.$$

Il suffit donc de prendre :

$$(9) \qquad \mu_1'' = -\frac{\zeta}{2\pi}.$$

ou :

$$\int \mu_1'' d\omega = -\frac{1}{2}.$$

La fonction ψ_1 satisfera alors aux mêmes conditions que la fonction ψ définie par le problème de Helmholtz. ψ_1 ne dépend que de x et de y, et la somme des charges est nulle, puisque les charges de C et de Ω sont égales et de signe contraire.

En un point de la surface du cylindre C, la densité super-

ficielle μ' sera telle que

$$\int \mu' ds = \frac{1}{2},$$

en appelant s l'arc de la courbe C.

Le potentiel a donc pour expression :

$$(10) \qquad \begin{aligned} \psi &= -2\int \mu' ds \log \rho - 2\int \mu'' d\omega \log \rho \\ &= \psi' + \psi'' \end{aligned}$$

(en désignant par ψ' la première intégrale, et par ψ'' la seconde).

Il faut bien remarquer que ψ' n'est pas le potentiel dû au cylindre C seul, et ψ'' le potentiel dû au cylindre Ω seul, parce que les charges de ces cylindres considérés isolément ne sont plus nulles.

L'expression du potentiel de C serait [**93**] :

$$-2\int \mu' ds \log \rho + 2 \log 2\sqrt{l^2 - z^2} \int \mu' ds,$$

ou :

$$-\psi' + \log 2\sqrt{l^2 - z^2},$$

et pour le cylindre Ω :

$$\psi'' - \log 2\sqrt{l^2 - z^2},$$

en remarquant que $\int \mu' ds = +\frac{1}{2}$, et $\int \mu'' d\omega = -\frac{1}{2}$.

Les composantes de la force électromotrice sont :

$$v = \frac{d\psi}{dx} \qquad u = -\frac{d\psi}{dy},$$

il faut les faire tourner de 90 degrés pour obtenir les composantes de la vitesse, dont les valeurs seront par conséquent :

$$(11) \qquad \begin{aligned} u &= -\frac{d\psi'}{dy} - \frac{d\psi''}{dy} \\ v &= \frac{d\psi'}{dx} + \frac{d\psi''}{dx}. \end{aligned}$$

96. Supposons que le tube devienne infiniment délié, sa trace se réduisant au point G, et que son moment reste égal à 2π.

Toute l'électricité sera concentrée sur la droite G perpendiculaire au plan des xy ; au voisinage de cette droite, la force électrique et, par conséquent, la vitesse deviennent infiniment grandes. Alors l'expression de ψ'' devient :

$$\psi'' = -2 \log \rho_0 \int \mu'' d\omega = \log \rho_0,$$

ρ_0 étant la distance du point M à la droite menée par le centre de gravité du tube, parallèlement à l'axe des z.

En effet, à des infiniment petits près d'ordre supérieur, ρ devient égal à ρ_0. [MP devient égal à MG (*fig.* 28)]. Si le point considéré M approche indéfiniment de G, ρ_0 tend vers 0, et ψ'' devient infiniment grand. Au contraire ψ' reste fini, parce que ρ reste fini même si le point M s'approche indéfiniment de G.

Par conséquent u et v croissent indéfiniment, quoique leurs premiers termes $\frac{d\psi'}{dy}$ et $\frac{d\psi'}{dx}$ demeurent finis, autrement dit les

fonctions :

$$u + \frac{d \log \rho_0}{dy}$$

$$v - \frac{d \log \rho_0}{dx}$$

restent finies, même au point G.

La fonction ψ doit donc satisfaire aux conditions suivantes :

La fonction doit être finie et continue ainsi que ses dérivées dans toute l'aire limitée par la courbe C, sauf au point G ; elle doit satisfaire en tout point de cette aire à l'équation de Laplace $\Delta\psi = 0$ et être égale à o en tout point du contour C ; enfin les fonctions

$$u + \frac{d \log \rho_0}{dy}, \qquad v - \frac{d \log \rho_0}{dx}$$

doivent rester finies au voisinage de G.

Le problème ainsi posé ne comporte qu'une solution ; cette solution nous sera donnée par la représentation conforme.

97. Admettons, en effet, que nous ayons obtenu la représentation conforme de l'aire C sur la surface d'un cercle de rayon égal à l'unité, ayant son centre à l'origine. Supposons que le point G corresponde au centre du cercle. A un point M (x, y) de l'aire C correspond M' (x', y') du cercle : $x' + \sqrt{-1}y'$ est une fonction de $x + \sqrt{-1}y$. Posons :

$$\log (x' + \sqrt{-1}y') = \psi + \sqrt{-1}\varphi.$$

Je dis que la fonction :

$$\psi = \log \sqrt{x'^2 - y'^2}$$

satisfait aux conditions demandées.

En effet :

$$\Delta\psi = 0$$

puisque ψ est la partie réelle d'une fonction analytique.

$\psi = 0$ tout le long de C, puisque C a pour représentation le cercle :

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

$\psi - \log \rho_0$ reste fini. Il ne pourrait être infini qu'au point G correspondant au point O, pour lequel :

$$x'^2 + y'^2 = 0.$$

Soient x_0, y_0 les coordonnées du point G :

$$\rho_0 = | x + \sqrt{-1}y | - | x_0 + \sqrt{-1}y_0 |$$

$$\psi - \log \rho_0 = \text{partie réelle de} \log \frac{x' + \sqrt{-1}y'}{x + \sqrt{-1}y - (x_0 + \sqrt{-1}y_0)}$$

$x' + \sqrt{-1}y'$ s'annule pour $x + \sqrt{-1}y = x_0 + \sqrt{-1}y_0$ et c'est un zéro simple ; la quantité sous le signe log ne s'annule donc plus au point G.

93. Vitesse du point G. — La vitesse du point G est déterminée par l'équation (1) [65].

$$\frac{dx_0}{dt}\int \zeta d\omega = \int u\zeta d\omega,$$

ou :

$$\frac{dx_0}{dt}\int \zeta d\omega = -\int \frac{d\psi'}{dy}\zeta d\omega - \int \frac{d\psi''}{dy}\zeta d\omega.$$

Or, $\int \frac{d\psi''}{dy}\zeta d\omega = 0$. En effet, si la cloison C n'existait pas,

les composantes de la vitesse seraient :

$$u = -\frac{d\psi''}{dy} \qquad v = \frac{d\psi''}{dz}.$$

Mais, dans ce cas, le centre de gravité G du tube tourbillonnaire est fixe :

$$\frac{dx_0}{dt} = -\frac{\int \frac{d\psi''}{dy}\zeta d\omega}{\int \zeta d\omega} = 0,$$

d'où :

$$\int \frac{d\psi''}{dy}\zeta d\omega = 0.$$

Il reste donc :

$$\frac{dx_0}{dt}\int \zeta d\omega = -\int \frac{d\psi'}{dy}\zeta d\omega,$$

$\frac{dx_0}{dt}$ sera une des valeurs que prend $-\frac{d\psi'}{dy}$ à l'intérieur de la section Ω du tube tourbillonnaire. Si le tube est infiniment délié, cette valeur diffère peu de la valeur que prend cette fonction au point G.

Pour calculer $\frac{dx_0}{dt}$, nous prendrons donc la dérivée $-\frac{d\psi'}{dy}$ et nous y substituerons à x et y les coordonnées x_0, y_0 du point G. De la même façon nous calculerons $\frac{dy_0}{dt} = \left(\frac{d\psi'}{dx}\right)_0$.

99. Comparaison électrostatique. — Considérons un point M dans le plan des xy ; la force électrique qui agit en ce point est, par raison de symétrie (puisque les extrémités

des droites électriques sont supposées dans les plans $z = \pm l$ équidistants du plan des xy), située dans ce plan, ses composantes ont pour expression $\frac{d\psi}{dx}, \frac{d\psi}{dy}$; elle est due à la charge du cylindre Ω et à la surface C. Cette force peut donc être regardée comme la résultante de deux autres, l'une due à la charge de C et dont les composantes seront :

$$\frac{d\psi'}{dx} \quad \frac{d\psi'}{dy} \quad \frac{d \log 2\sqrt{l^2 - z^2}}{dz},$$

Si le point M est dans le plan des xy, la troisième composante s'annule. La seconde force due à Ω a pour composantes :

$$\frac{d\psi''}{dx} \quad \frac{d\psi''}{dy} \quad - \frac{d \log 2\sqrt{l^2 - z^2}}{dz}.$$

Le second terme du potentiel de Ω ne dépend pas non plus de x et de y.

Dans le plan des xy, la troisième composante s'annule encore, et nous avons deux forces dont les trois composantes sont respectivement :

$$\frac{d\psi'}{dx} \quad \frac{d\psi'}{dy} \quad 0$$

et

$$\frac{d\psi''}{dx} \quad \frac{d\psi''}{dy} \quad 0 ;$$

près du point G cette dernière devient très grande. La première reste finie et, d'après le numéro précédent, en la faisant tourner de 90 degrés, on obtiendra la vitesse du point G.

100. Trajectoire du point G. — Pour trouver cette trajectoire, ou plutôt une de ses principales propriétés, car il

n'est pas toujours possible d'obtenir son équation sous forme finie, il est commode de recourir encore à la comparaison électrostatique.

101. Je rappelle d'abord quelques théorèmes d'électrostatique dont je ferai usage.

Théorème I. — Soit un champ électrique contenant des conducteurs qui possèdent des charges $M_1, M_2, \ldots, M_n$ respectivement aux potentiels $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Si ce champ subit un changement, le travail produit par les forces électriques est égal à l'accroissement de la somme :

$$\frac{1}{2}(M_1V_1 + M_2V_2 + \ldots + M_nV_n) = \frac{1}{2}\sum MV.$$

Théorème II. — Soient deux systèmes de conducteurs S et S′, qui exercent l'un sur l'autre des actions mutuelles (abstraction faite des forces qu'exercent les conducteurs d'un système sur les conducteurs du même système).

Supposons, pour simplifier l'énoncé, que les conducteurs soient très petits et assimilables à des points. S'il n'en était pas ainsi, on devrait décomposer chaque conducteur en éléments infiniment petits.

Soient $M_1, M_2, \ldots, M_n$ les charges électriques des conducteurs qui composent le système S; $V'_1, V'_2, \ldots, V'_n$ les potentiels que produirait le système S′ aux points où se trouvent ces charges. Soient $M'_1, M'_2, \ldots, M'_n$ les charges des conducteurs dans le système S′, et $V_1, V_2, \ldots, V_n$ les potentiels que produirait en ces points le système S.

Le travail des forces qu'exerce S sur S′ augmenté du travail des forces qu'exerce S′ sur S est égal à l'accroissement de la

fonction :

$$M_1V_1' + M_2V_2' + \dots + M_nV_n' = M_1'V_1 + \dots M_n'V_n$$

ou :

$$\sum MV' = \sum M'V \cdot$$

Si les masses électriques sont en nombre infini, les théorèmes sont encore vrais ; mais il faut remplacer les sommes $\sum$ par des intégrales $\int \cdot$

102. Appliquons ces théorèmes à l'étude du champ électrique que nous avons défini [**95**].

Les forces qui s'exercent dans ce champ forment quatre groupes :

Les forces F_1, exercées par les charges μ'' les unes sur les autres ; les forces F_2, actions des charges μ' sur les charges μ'' ; les forces F_2', actions des charges μ'' sur les charges μ', et enfin les forces F_3, actions des charges μ'' les unes sur les autres.

Décomposons le cylindre Ω en éléments infiniment petits de la manière suivante ; nous partagerons le cylindre Ω en cylindres infiniment déliés de section $d\omega$, parallèles à Oz, et nous découperons ensuite ces cylindres par des plans parallèles au plan des xy ; le volume de chaque tranche sera $d\omega\, dz$, et sa charge $\mu'' d\omega dz$.

Les composantes de la force F_2 relatives à cet élément seront :

$$\mu'' d\omega dz \frac{d\psi'}{dx}$$

$$\mu'' d\omega dz \frac{d\psi'}{dy}$$

$$\mu'' d\omega dz \frac{d \log 2\sqrt{l^2 - z^2}}{dz}.$$

Remarquons que la section du cylindre Ω a été supposée très petite. A l'intérieur de cette section, $\frac{d\psi'}{dx}$ et $\frac{d\psi'}{dy}$ ont une valeur sensiblement constante. Le point d'application de la résultante des forces F_2 est situé à l'intérieur de Ω : il est donc très rapproché de la droite menée par le point G parallèlement à Oz. En appelant l la charge totale de Ω, supposée concentrée sur cette droite, la résultante des forces F_2 aura pour projections :

$$-l\frac{d\psi'}{dx} \qquad -l\frac{d\psi'}{dy} \qquad 0.$$

103. Evaluons le travail de ces forces et commençons par le travail total des quatre sortes de forces électrostatiques F_1, F_2, F_2' et F_3.

Le travail des forces électrostatiques est représenté, ainsi que nous l'avons rappelé, par l'accroissement de :

$$\frac{1}{2}\int V dm,$$

V étant le potentiel auquel se trouve la charge infiniment petite dm, et l'intégrale étant étendue à toutes les masses. Dans le cas qui nous occupe, le potentiel total est ψ. Le travail cherché est donc égal à l'accroissement de :

$$\frac{1}{2}\int\psi\mu'' d\omega\, dz + \frac{1}{2}\int\psi\mu' ds dz,$$

$d\omega$ étant la section d'un des cylindres élémentaires dans lesquels nous avons décomposé Ω ; et ds, un élément du contour C, de sorte que la surface C est décomposée en rectangles dont l'aire est $dsdz$.

En remarquant que ψ, μ' et μ'' ne dépendent pas de z, et qu'on doit intégrer entre $z = -l$ et $z = +l$, cette expression s'écrit :

$$l\int\psi\mu''d\omega + l\int\psi\mu'ds.$$

Posons :

$$\mathrm{P} = \int\psi\mu''d\omega + \int\psi\mu'ds.$$

Le travail des forces électrostatiques sera représenté par :

$$d\mathfrak{T} = ld\mathrm{P}.$$

104. Faisons le même calcul pour les forces F_1 seules. La charge d'un petit cylindre est $\mu''d\omega dz$, et son potentiel

$$\psi'' - \log 2\sqrt{l^2 - z^2}$$

il vient donc :

$$d\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\, d\int[\psi'' - \log 2\sqrt{l^2 - z^2}]\,\mu''d\omega dz$$

$$= \frac{1}{2}\, d\int\psi''\mu''d\omega dz - \frac{1}{2}\, d\int\mu''d\omega \log 2\sqrt{l^2 - z^2}dz$$

$$= l\, d\int\psi''\mu''d\omega - \frac{1}{2}\int\mu''d\omega\int_{-l}^{+l}\log 2\sqrt{l^2 - z^2}dz,$$

car μ'' ne dépend pas de z. Les deux dernières intégrales sont des constantes. En posant par conséquent :

$$\mathrm{P}' = \int\psi''\mu''d\omega,$$

le travail des forces F_1 aura pour expression :

$$ld\mathrm{P}'.$$

Le travail des autres forces F_2, F'_2 et F''_3 sera représenté par la différence :

$$ld\,(P - P').$$

Or :

$$P - P' = \int \psi' \mu'' d\omega + \int \psi \mu' ds.$$

ψ représente le potentiel d'un point de C ; ce potentiel est nul puisque C communique avec le sol : le second terme est donc nul. La première intégrale doit être étendue à toute l'aire Ω. Comme cette aire est infiniment petite, ψ' y a une valeur à peu près constante dans toute son étendue, valeur égale à celle qu'il a au point G, ψ'_0. Nous pourrons donc écrire :

$$P - P' = \psi'_0 \int \mu'' d\omega = -\frac{1}{2}\psi'_0.$$

105. Supposons que le tube se déplace, la vitesse de son centre de gravité aura comme composantes :

$$\frac{dx_0}{dt} = -\left(\frac{d\psi'}{dy}\right)_0 \qquad \frac{dy_0}{dt} = \left(\frac{d\psi'}{dx}\right)_0$$

$\left(\frac{d\psi'}{dy}\right)_0$ désignant la valeur que prend $\frac{d\psi'}{dy}$ quand on substitue à x et à y les coordonnées x_0, y_0 du point G.

Les masses μ'' se déplacent donc, et ce déplacement modifie en même temps la distribution électrique sur la surface C.

Les forces F_2 ont pour composantes dans le plan des xy :

$$\frac{d\psi'}{dx} \qquad \frac{d\psi'}{dy}.$$

La résultante des forces F_2 est donc normale à la trajectoire du

point G et, par suite, ne fournit aucun travail. Il en est de même des forces F'_2 et F_3. En effet la résultante de ces forces est normale au conducteur C (car dans une distribution électrostatique les lignes de forces aboutissent toujours normalement aux conducteurs) : les masses μ' se déplacent, *mais en restant à la surface du conducteur*, et par conséquent dans une direction perpendiculaire à celle de la force. Cette force ne produit pas de travail.

Le travail total des forces F_2, F'_2 et F_3 est donc nul.

Il résulte de là que :

$$d(P - P') = o,$$

ou :

$$P - P' = \text{const},$$

et :

$$\psi'_0 = \text{const}.$$

106. La trajectoire est une courbe fermée. — Supposons qu'on ait fait la représentation conforme de l'aire C sur un cercle K ayant son centre en O (*fig.* 29). Au point G (x_0, y_0) correspond G' (x'_0, y'_0), et au point M (x, y) le point M' (x', y'). Posons :

$$x' + \sqrt{-1}\, y' = Z'$$

$$x + \sqrt{-1}\, y = Z$$

$$x'_0 + \sqrt{-1}\, y'_0 = Z'_0$$

$$x_0 + \sqrt{-1}\, y_0 = Z_0$$

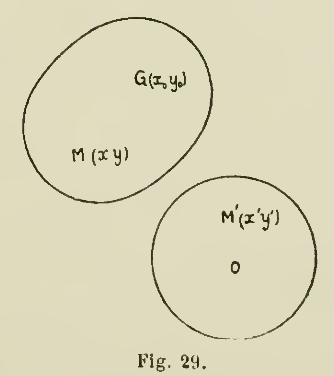


Fig. 29.

Z' est une certaine fonction de Z, $f(Z)$. Z'_0 la même fonction de Z_0, $f(Z_0)$.

Posons encore :

$$x'_0 - \sqrt{-1}\, y'_0 = U'_0.$$

Pour pouvoir appliquer les formules, il nous faut trouver une autre représentation conforme telle qu'au point G corresponde le point O, et à M un point M″ (x'', y'') tel que :

$$x'' + \sqrt{-1}\, y'' = Z'' = \varphi(Z).$$

Pendant le déplacement du point G, la forme de la fonction φ variera, mais celle de f demeurera la même, car dans la définition de f le point G ne joue aucun rôle.

Nous savons [**88**] qu'il suffit de prendre :

$$Z'' = \frac{Z' - Z'_0}{Z'U'_0 - 1}$$

En effet : si mod $Z' = 1$, on a mod $Z'' = 1$.

Si $Z = Z_0$, $Z' = Z'_0$ et $Z''_0 = o$, c'est-à-dire qu'au point G correspond bien le point O.

Z'' est une fonction de x et de y :

$$Z'' = e^{\psi + \sqrt{-1}\varphi}$$

$$\psi = p \text{ réelle de } \log Z'' = \log |Z''|$$

$$\psi'' = \log \rho_0$$

en prenant :

$$\rho_0 = MG = |Z - Z_0|$$

$$\psi' = \log \left|\frac{Z''}{Z - Z_0}\right| = \log \left|\frac{Z' - Z'_0}{Z - Z_0}\right| - \log |Z'U'_0 - 1|$$

ψ'_0 est la valeur de cette expression pour $Z = Z_0$, soit en

appliquant la règle de l'Hôpital :

$$\psi'_0 = \log\left|\frac{dZ'_0}{dZ_0}\right| - \log|Z'_0U'_0 - 1|$$

$$= \log\left|\frac{dZ'_0}{dZ_0}\right| - \log[1 - |Z'_0|^2].$$

L'équation $\psi'_0 = \text{const}$ peut donc s'écrire en passant des logarithmes aux nombres :

$$\frac{\left|\frac{dZ'_0}{dZ_0}\right|}{1 - |Z'_0|^2} = \text{const.}$$

La trajectoire est donc toujours une courbe fermée.

CHAPITRE VII

MOUVEMENT DES TUBES TOURBILLONNAIRES THÉORÈMES GÉNÉRAUX. TUBES DE RÉVOLUTION

107. Tubes tourbillonnaires de révolution. — Supposons qu'il existe dans un liquide indéfini des tubes tourbillonnaires qui soient de révolution autour de l'axe des z. Si cette condition est remplie à l'origine des temps, elle subsistera constamment ; tout plan passant par l'axe des z sera et restera un plan de symétrie.

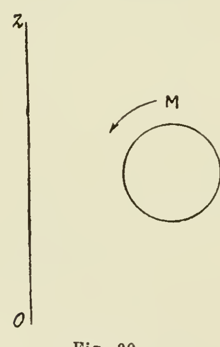


Fig. 30.

Soit M un point quelconque du liquide ; menons le plan méridien passant par ce point (*fig.* 30), et prenons l'image du système par rapport à ce plan. La vitesse du point M ne devant pas changer, par raison de symétrie, il faut qu'elle soit contenue dans ce plan méridien.

108. Considérons un tube infiniment délié, formant une

sorte de tore (*fig.* 31), et soient $d\omega$ sa section droite, R la distance du centre de gravité de cette section à l'axe Oz. Le volume du tube sera :

$$2\pi R d\omega,$$

et il doit demeurer constant. Le tourbillon σ étant perpendiculaire au plan méridien, le moment du tube a une valeur

$$2\sigma d\omega$$

constante tout le long du tube. Puisque $d\omega$ est constant, il faut que σ le soit aussi ; σ ne dépend que de z et de R ; en posant :

Fig. 31

$$x = R\cos\varphi$$
$$y = R\sin\varphi$$
$$z = z$$

il viendra :

$$\sigma = f(R, z).$$

D'autre part, le moment du tube doit demeurer constant par rapport au temps ; il en sera par conséquent de même de $\frac{\sigma}{R}$.

109. Nous avons à trouver des fonctions u, v, w qui satisfassent aux équations :

(1)
$$2\xi = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}$$
$$2\eta = \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}$$
$$2\zeta = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}$$
$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Ces équations ont la même forme que celles de Maxwell. Elles se confondent avec les équations de Maxwell en admettant qu'on remplace les tubes tourbillonnaires par des courants dont les composantes soient $\frac{\xi}{2\pi}, \frac{\eta}{2\pi}, \frac{\zeta}{2\pi}$; u, v, w seraient les composantes du champ magnétique déterminé par ces courants.

Maxwell introduit ce qu'il appelle le potentiel vecteur dont les composantes F, G, H sont définies par les conditions :

$$u = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \text{ etc.,} \tag{2}$$

et qui vérifie la condition

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0.$$

En éliminant u, v, w, on trouve

$$\Delta F + 4\pi u = 0,$$

ou

$$\Delta F + 4\pi . \frac{\xi}{2\pi} = 0.$$

F est donc le potentiel d'une matière attirante dont la densité serait $\frac{\xi}{2\pi}$. Soient x, y, z les coordonnées d'un point du champ; x', y', z' les coordonnées du centre de gravité d'un élément de volume $d\tau$; ξ', η', ζ', les valeurs de ξ, η, ζ en ce point ; r, la distance des points x, y, z et x', y', z', nous aurons, d'après

cela :

$$(3) \qquad \begin{cases} F = \displaystyle\int \frac{\xi' d\tau}{2\pi r} \\ G = \displaystyle\int \frac{\eta' d\tau}{2\pi r} \\ H = \displaystyle\int \frac{\zeta' d\tau}{2\pi r}. \end{cases}$$

Ces formules donnent F, G, H et par suite u, v, w quand ξ, η, ζ sont connus. (Cf. *Electricité et optique*, I, page 144, sqq.)

110. Expression de la force vive du liquide. — La force vive totale du liquide a pour expression :

$$(4) \qquad T = \frac{1}{2}\int (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau,$$

en supposant que la densité du liquide est prise pour unité ; dans la comparaison électrodynamique, si le milieu dans lequel se trouvent les courants n'est pas magnétique ($\mu = 1$), l'énergie électrocinétique sera :

$$(5) \qquad \frac{1}{8\pi}\int (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau = \frac{T}{4\pi}.$$

Cette énergie électrocinétique est susceptible d'une autre expression. Considérons, en effet, un élément de courant sur l'un des circuits qui engendrent le champ ; soient ds cet élément ; i, l'intensité du courant ; P la projection du potentiel vecteur sur la direction de l'élément ds, la somme :

$$\frac{1}{2}\int i ds P$$

étendue à tous les éléments de courant représente l'énergie cinétique. Si pour un instant nous désignons avec Maxwell par u, v, w les composantes du courant, Maxwell démontre que :

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\int ids.\mathrm{P} = \frac{1}{2}\int (\mathrm{F}u + \mathrm{G}v + \mathrm{H}w)\, d\tau.$$

(Cf. *Électricité et Optique*, I, page 153.)

Dans nos notations actuelles les composantes du courant sont

$$\frac{\xi}{2\pi}, \quad \frac{\eta}{2\pi}, \quad \frac{\zeta}{2\pi},$$

d'où :

$$\frac{1}{2}\int ids\mathrm{P} = \frac{1}{2}\int\left(\mathrm{F}\frac{\xi}{2\pi} + \mathrm{G}\frac{\eta}{2\pi} + \mathrm{H}\frac{\zeta}{2\pi}\right)d\tau = \frac{1}{4\pi}\int\left(\mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta\right)d\tau,$$

et

$$(7) \qquad \mathrm{T} = \int (\mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta)\, d\tau.$$

111. L'identité de ces deux expressions se démontre d'ailleurs directement. En effet:

$$\int (\mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta)\, d\tau = \int \sum \mathrm{F}\xi d\tau = \int \sum \mathrm{F}\frac{dw}{dy}d\tau - \int \sum \mathrm{F}\frac{dv}{dz}\, d\tau.$$

Remarquons que $d\tau = dxdydz$, et intégrons par parties :

$$\int \mathrm{F}\frac{dw}{dy}\, dxdydz = \int \mathrm{F}w dxdz - \int w\frac{d\mathrm{F}}{dy}\, d\tau.$$

Nous devons intégrer entre $-\infty$ et $+\infty$. Or, à l'infini,

F et w sont nuls; le terme tout connu est donc nul aux limites, et il reste seulement :

$$\int F \frac{dw}{dy} d\tau = - \int w \frac{dF}{dy} d\tau.$$

De même :

$$\int F \frac{dv}{dz} d\tau = - \int v \frac{dF}{dz} d\tau.$$

Donc

$$T = -\frac{1}{2} \int \sum w \frac{dF}{dy} d\tau + \frac{1}{2} \int \sum v \frac{dF}{dz} d\tau,$$

soit, en développant les $\sum$:

$$T = \frac{1}{2} \int d\tau \left(v \frac{dF}{dz} + w \frac{dG}{dx} + u \frac{dH}{dy} - w \frac{dF}{dy} - u \frac{dG}{dz} - v \frac{dH}{dx} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int d\tau \left[u \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + v \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + w \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right]$$

ou, en se reportant aux équations (2)

$$T = \frac{1}{2} \int (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau.$$

112. Actions mutuelles des éléments de courants qui remplacent les tubes tourbillonnaires. — Soit un élément de courant MM′ de longueur ds et d'intensité i placé dans un champ magnétique ; soient MP le vecteur qui représente la force magnétique en M ; MC, un vecteur tangent à MM′ et proportionnel à ids. L'élément MM′, comme on le sait, est

soumis à une force perpendiculaire au plan MTC et égale à l'aire du parallélogramme construit sur MT et sur MC. Soient dx, dy, dz les projections de ds sur les trois axes; α, β, γ celles de la force magnétique MT ; idx, idy, idz les projections du vecteur MC. Les projections de la force électrodynamique sur les axes sont :

$$
\begin{array}{ll}
Ox) & idz.\beta - idy.\gamma \\
Oy) & idx.\gamma - idz.\alpha \\
Oz) & idy.\alpha - idx.\beta.
\end{array}
$$

Dans le cas qui nous occupe, les quantités qui correspondent à idx, idy, idz sont :

$$\frac{\xi d\tau}{2\pi}, \quad \frac{\eta d\tau}{2\pi}, \quad \frac{\zeta d\tau}{2\pi},$$

et celles qui correspondent à α, β, γ sont u, v, w. Les composantes de la force électrodynamique seront alors :

$$\frac{d\tau}{2\pi}(v\zeta - w\eta) = \mathrm{X}d\tau$$

$$\frac{d\tau}{2\pi}(w\xi - u\zeta) = \mathrm{Y}d\tau$$

$$\frac{d\tau}{d\pi}(u\eta - v\xi) = \mathrm{Z}d\tau.$$

en posant :

$$\mathrm{X} = \frac{1}{2\pi}(v\zeta - w\eta) \;\ldots\ldots, \text{ etc.}$$

113. Théorème. — Les forces (X, Y, Z) qui représentent les actions mutuelles des éléments de courants fictifs, par lesquels

nous avons remplacé nos tubes tourbillonnaires, doivent être égales et opposées deux à deux. Donc :

La somme de leurs projections sur un axe quelconque est nulle :

$$(8) \quad \sum X d\tau = 0 \qquad \text{ou :} \qquad \sum (v\zeta - w\eta)\, d\tau = 0.$$

De même, la somme de leurs moments par rapport à un axe quelconque est nulle :

$$(9) \qquad \sum (Xy - Yx)\, d\tau = 0.$$

114. Démonstration directe de l'équation $\Sigma X d\tau = 0$. — Soit une surface S, par exemple une sphère ayant pour centre l'origine et de rayon R très grand. Soit $d\omega$ un élément de cette surface, l, m, n les cosinus directeurs de la normale à cet élément. Je dis que l'intégrale :

$$\int d\omega \left[\frac{l}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - u\,(lu + mv + nw)\right]$$

est nulle.

En effet, nous avons supposé tous nos tubes tourbillonnaires à distance finie ; un point de la surface situé à une distance R très grande de l'origine sera aussi à une distance très grande, du même ordre que R, des tubes tourbillonnaires. Le vecteur (u, v, w) représente la vitesse ou la force magnétique. On sait que cette force magnétique varie comme $\frac{1}{R^3}$. Si donc nous regardons R comme un infiniment grand du premier ordre, u, v, w seront infiniment petits du troisième ordre, comme $\frac{1}{R^3}$,

et u^2, v^2, w^2 seront du sixième ordre. La surface à laquelle on étend l'intégrale est infiniment grande, il est vrai, mais seulement du second ordre ; l'intégrale est donc nulle.

Transformons cette intégrale d'après la formule connue :

$$\int l\mathrm{F}d\omega = \int \frac{d\mathrm{F}}{dx}\, d\tau,$$

il vient :

$$\int d\tau \begin{bmatrix} u\dfrac{du}{dx} + v\dfrac{dv}{dx} + w\dfrac{dw}{dx} \\ -u\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dy} - u\dfrac{dw}{dz} \\ -u\dfrac{du}{dx} - v\dfrac{du}{dy} - w\dfrac{du}{dz} \end{bmatrix} = 0.$$

La seconde ligne est nulle en vertu de l'équation de continuité. En tenant compte des équations (1), il reste :

$$2\int d\tau\,(v\zeta - w\eta) = 0,$$

ou :

$$\sum \mathrm{X}d\tau = 0.$$

115. Le théorème des moments donne une équation analogue :

$$\int (\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x)\, d\tau = 0,$$

ou :

$$\int \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} d\tau = 0. \qquad (9)$$

116. Autre expression de la force vive T. — Pour obtenir cette expression, rappelons d'abord le théorème d'électrodynamique suivant : Si on déplace des courants sans changer leur intensité, le travail des forces électrodynamiques est égal à l'accroissement de l'énergie électrocinétique. Soit un élément de courant ds d'intensité i : supposons que les coordonnées x, y, z de cet élément éprouvent des variations $\delta x, \delta y, \delta z$.

$$\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau = \frac{\delta T}{4\pi}.$$

Admettons en particulier que $\delta x, \delta y, \delta z$ soient proportionnels à x, y, z :

$$\delta x = \varepsilon x, \qquad \delta y = \varepsilon y, \qquad \delta z = \varepsilon z.$$

ε étant une constante infiniment petite, la transformation revient à multiplier toutes les distances par $1 + \varepsilon$. Supposons pour fixer les idées qu'il n'y ait que deux courants ; dans ce cas

$$T = \frac{1}{2}(Li^2 + 2Mii' + Ni'^2)$$

$$\delta T = \frac{1}{2}(\delta L i^2 + 2\delta M ii' + \delta N i'^2).$$

Dans le changement particulier que nous avons effectué, les courants restent homothétiques par rapport à l'origine. Dans le système électromagnétique L, M, N sont des longueurs : en raison de l'homogénéité ces longueurs doivent être multipliées par $1 + \varepsilon$. Donc :

$$\delta L = L\varepsilon, \qquad \delta M = M\varepsilon, \qquad \delta N = N\varepsilon,$$

et enfin :

$$\delta T = T\varepsilon.$$

Cette formule reste évidemment vraie pour un nombre quelconque, et même une infinité de courants. Donc :

$$\int (Xx + Yy + Zz)\,\varepsilon = \frac{T\varepsilon}{4\pi},$$

ou en supprimant ε et remplaçant X, Y, Z par leurs valeurs :

$$(10) \qquad = \int \begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} d\tau = \frac{T}{2},$$

ou en représentant le déterminant par D :

$$\int D\,d\tau = \frac{T}{2}.$$

117. Liquide enfermé dans un vase. — S'il s'agit d'un liquide renfermé dans un vase qu'il remplit complètement, on pourra recourir encore à la comparaison électrodynamique à la condition de remplacer le vase par un conducteur parfait.

Maxwell a montré que dans un tel conducteur les courants sont localisés à la surface, et que cette surface forme un écran électrodynamique (nappes de courants). Les théorèmes énoncés précédemment demeureront vrais si on tient compte de cette nappe de courants.

118. Considérons un point de la surface du vase : les molécules de liquide situées à l'intérieur du vase ont une vitesse située dans le plan tangent ; en un point infiniment

voisin, mais situé de l'autre côté de la surface, le liquide en repos. La vitesse est donc discontinue. Cette discontinuité peut être remplacée par l'introduction d'un tube tourbillonnaire. En effet, prenons le cas particulier d'une surface plane, le plan des xy par exemple, le liquide étant au-dessous de ce plan. Au-dessus du plan la vitesse sera nulle ; au dessous, elle sera constante et parallèle à Ox.

Supposons que la variation de vitesse se fasse non pas brusquement, mais d'une façon continue, quoique très rapide. Dans la couche de passage u sera une certaine fonction de z :

$$u = f(z)$$

et :

$$\frac{du}{dz} = f'(z)$$

sera différent de O. D'après les hypothèses faites, u est fonction de z, seulement ; $v = w = 0$. Donc ξ et ζ sont nuls ; mais

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{du}{dz}$$

est différent de O, et est même très grand.

Le tourbillon qui remplace la discontinuité sera donc parallèle au plan de séparation et perpendiculaire à la vitesse u.

119. Si la surface de séparation est courbe, et la vitesse variable, le théorème sera encore vrai. Il suffit, pour le démontrer, de décomposer la surface en éléments assez petits pour qu'on puisse considérer ces éléments comme plans, et la vitesse comme constante dans toute leur étendue ; il est toujours possible de choisir l'épaisseur de la couche de passage

très petite même vis-à-vis de ces éléments ; nous pourrons ainsi remplacer la surface par une nappe de tubes tourbillonnaires. D'après la démonstration précédente, chacun des tubes sera dirigé dans le plan de l'élément, c'est-à-dire dans le plan tangent à la surface, et la limite sera sur cette surface elle-même, perpendiculairement à la vitesse au point considéré.

120. La force (X, Y, Z) qui représente l'action électrodynamique sur un élément de nos courants fictifs doit être perpendiculaire à la fois au courant et à la force magnétique. Le courant est dans le plan tangent à la surface du vase ; la force magnétique, qui est dirigée comme la vitesse, est aussi située dans le plan tangent ; la force (X, Y, Z) est donc normale à la surface du vase.

121. Pour appliquer au cas actuel les théorèmes que nous avons démontrés dans le cas d'un liquide indéfini (**113-116**), il nous faudra tenir compte de deux groupes de forces électrodynamiques, celles qui agissent sur les courants que nous avons substitués aux tubes tourbillonnaires, et celles qui agissent sur la nappe de courants qui remplace la surface.

Mais, dans un certain nombre de cas particuliers, les termes complémentaires provenant de ces dernières forces, que nous devrions ajouter dans nos équations, auront une somme nulle.

Par exemple, si le vase a la forme d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Ox, les forces qui agissent sur la nappe de courants étant normales à la surface seront normales à Ox, et la somme de projections sur Ox sera nulle. Le premier théorème reste vrai sans modification (**113**).

Si le vase est de révolution autour de Oz, la somme des

moments des forces complémentaires par rapport à Oz sera nulle, puisque toutes ces forces rencontreront Oz. Le deuxième théorème (**113**) sera encore vrai.

Si le vase est une sphère ou l'espace compris entre deux sphères concentriques, le second théorème est vrai par rapport à un axe quelconque passant par le centre, la sphère étant de révolution autour d'un axe quelconque.

Si le vase est limité par deux plans parallèles au plan des xy par exemple, on peut le considérer comme de révolution autour de l'axe des z, ou comme un cylindre parallèle soit à Ox et à Oy, et appliquer les remarques relatives à ces différents cas.

122. Les tubes tourbillonnaires sont des cylindres parallèles à oz. — Dans ces conditions :

$$\xi = \eta = 0 \qquad w = 0$$

ζ, u, v ne dépendent que de z.

Le mouvement ne sera pas modifié (56) si nous limitons une portion du liquide par deux plans parallèles au plan des xy, par exemple : $z = 0$, $z = 1$. Les deux théorèmes sont encore applicables. Voici comment nous définirons l'élément $d\tau$. Décomposons le plan des xy en éléments de surface $d\omega$, et prenons chacun de ces éléments comme base d'un cylindre parallèle à Oz, et limité aux plans $z = 0$ et $z = 1$. L'espace compris entre les deux plans sera de cette façon partagé en une infinité de ces cylindres; puis nous menons des plans parallèles au plan des xy, distants entre eux de dz. C'est la tranche limitée dans un des cylindres par deux de ces plans

que nous prendrons pour l'élément $d\tau$. Nous aurons donc :

$$d\tau = d\omega dz,$$

et l'expression du premier théorème devient :

$$\int v\zeta dz d\omega = 0$$

Comme v, ζ ne dépendent pas de z ; nous pouvons intégrer par rapport à z entre les limites $z = 0$ et $z = +1$, d'où :

(11) $$\int v\zeta d\omega = 0$$

de la même manière, nous trouverions

(12) $$\int u\zeta d\omega = 0.$$

Le second théorème devient, en dvéeloppant le déterminant (**116**)

$$\int (xu + yv)\zeta dz d\omega = 0$$

ou en intégrant par rapport à z, comme ci-dessus :

(13) $$\int (xu + yv)\zeta d\omega = 0.$$

123. Nous retrouvons ainsi les théorèmes que nous avons démontrés dans les chapitres précédents.

Le centre de gravité de tous les tubes tourbillonnaires demeure fixe, ce qui s'exprime par les équations :

$$\int x\zeta d\omega = \text{const}$$

$$\int y\zeta d\omega = \text{const}$$

et le moment d'inertie des tubes par rapport à un axe quelconque parallèle à Oz demeure constant, par rapport à Oz lui-même, par exemple :

$$(14) \qquad \int (x^2 + y^2)(x^2 + y^2)\, d\zeta d\omega = \text{const.}$$

En différentiant ces équations par rapport à t, il vient en effet :

$$\int \frac{dx}{dt} \zeta d\omega = \int u \zeta d\omega = 0$$

$$\int \frac{dy}{dt} \zeta d\omega = \int v \zeta d\omega = 0$$

$$\int \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \zeta d\omega = \int (xu + yv)\, \zeta d\omega = 0.$$

Nous retrouvons les équations (11), (12) et (13) écrites ci-dessus.

Enfin, en écrivant que la somme des moments des quantités de mouvement des tubes par rapport à Oz est nulle, nous obtenons :

$$\int (uy - vx) \zeta d\omega = \text{const}$$

ou

$$\int \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{vmatrix} d\omega = \text{const}$$

qui, dans le cas où nous nous sommes placés, n'est autre que l'équation (10) du n° **116** :

$$\int \mathrm{D} d\tau = \text{const.}$$

124. Démonstration directe de la relation $\int D d\tau = \frac{T}{2}$. — Revenons maintenant au cas général. Nous avons démontré par la comparaison électrodynamique la relation (10)

$$\int D d\tau = \frac{T}{2}.$$

Cette relation peut aussi s'établir directement, comme nous allons maintenant le faire voir.

Posons pour abréger :

$$h = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2},$$

ou

$$T = \int h d\tau.$$

Développons le déterminant D suivant les éléments de la première ligne

$$D = Ax + By + Cz,$$

en posant

$$A = \eta w - \zeta v$$
$$B = \zeta u - \xi w$$
$$C = \xi v - \eta u.$$

Calculons A par exemple

$$2A = 2\eta w - 2\zeta v = w\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right) - v\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right)$$
$$= u\frac{du}{dx} - u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} - v\frac{dv}{dx} + w\frac{du}{dz} - w\frac{dw}{dx}$$
$$= u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} - \frac{dh}{dx};$$

les expressions de B et de C se déduiront de celle-là par symétrie.

Envisageons l'intégrale

$$\int_s \left[(lx+my+nz)\frac{u^2+v^2+w^2}{2} - (lu+mv+nw)(xu+yv+zw) \right] d\omega.$$

Cette intégrale, prise sur toute la surface d'une sphère de rayon très grand, est nulle, d'après un raisonnement que nous avons fait plusieurs fois déjà (voir en partie, **114**). Transformons-la d'après la formule dont nous avons aussi déjà fait usage :

$$\int lX d\omega = \int \sum \frac{dX}{dx} d\tau$$

ou

$$\int \sum lX d\omega = \int \sum \frac{dX}{dx} d\tau.$$

$$X = x\frac{u^2+v^2+w^2}{2} - u(xu + yv + zw) = xh - uK$$

en posant :

$$K = xu + yv + zw,$$

et par conséquent

$$\frac{dX}{dx} = x\frac{dh}{dx} + h - \frac{du}{dx}K - u^2 - u\left(x\frac{du}{dx} + y\frac{dv}{dx} + z\frac{dw}{dx}\right)$$

$$\frac{dY}{dy} = y\frac{dh}{dy} + h - \frac{dv}{dy}K - v^2 - v\left(x\frac{du}{dy} + y\frac{dv}{dy} + z\frac{dw}{dy}\right)$$

$$\frac{dZ}{dz} = z\frac{dh}{dz} + h - \frac{dw}{dz}K - w^2 - w\left(x\frac{du}{dz} + y\frac{dv}{dz} + z\frac{dw}{dz}\right),$$

les deux dernières équations étant obtenues par symétrie. Nous devons écrire que :

$$\int \sum \frac{dX}{dx} d\tau = 0.$$

En effectuant la somme $\sum$ nous trouvons après des réductions évidentes, en tenant compte de l'équation de continuité :

$$\sum \frac{dX}{dx} = h - 2(Ax + By + Cz) = h - 2D,$$

d'où

$$\int h d\tau - \int 2D d\tau = 0$$

$$\int D d\tau = \frac{1}{2} \int h d\tau = \frac{T}{2}.$$

125. Les tubes tourbillonnaires sont de révolution autour de Oz. — Supposons que les tubes tourbillonnaires soient de révolution autour de Oz. Dans ce cas, nous adopterons les coordonnées semi-polaires en posant :

$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$
$$z = z.$$

Par hypothèse, le tourbillon est en chaque point perpendiculaire au méridien.

Si donc σ est la grandeur du tourbillon :

$$\xi = -\sigma \sin \varphi$$
$$\eta = \sigma \cos \varphi$$
$$\zeta = 0.$$

Par raison de symétrie [107], la vitesse (u, v, w) est située dans le plan méridien et

$$u = \frac{d\rho}{dt} \cos \varphi$$

$$v = \frac{d\rho}{dt} \sin \varphi$$

$$w = \frac{dz}{dt}.$$

De plus, comme nous l'avons vu [108], $\frac{\sigma}{\rho}$ est une constante.

Substituons ces valeurs dans nos équations : un certain nombre se réduisent à des identités. Mais il nous restera en particulier la suivante :

$$(15) \qquad \int (u\eta - v\xi)\, d\tau = 0.$$

Pour définir l'élément $d\tau$, considérons un plan méridien, celui des zy par exemple : décomposons-le en éléments de surface $d\omega$. Chacun de ces éléments dans la révolution autour de Oz engendre un volume. Si nous menons des plans méridiens distants angulairement de $d\varphi$, ces plans découperont dans les volumes des tronçons assimilables à des cylindres de section $d\omega$ et de hauteur $\rho d\varphi$. Le volume de ces tronçons sera :

$$d\tau = \rho d\omega d\varphi.$$

L'équation (15) deviendra :

$$\int \sigma \frac{d\rho}{dt} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho d\omega d\varphi = 0,$$

ou

$$(16) \qquad \int \sigma \frac{d\rho}{dt} \rho \, d\omega \, d\varphi = 0.$$

L'intégrale doit être étendue à tous les éléments $d\omega$ d'une moitié du plan des zy, et entre les limites $\varphi = 0$, et $\varphi = 2\pi$.

Comme le coefficient de $d\varphi$ ne dépend pas de φ, on peut intégrer par rapport à φ et écrire :

$$(17) \qquad \int \sigma \rho \frac{d\rho}{dt} d\omega = 0.$$

Transformons maintenant le déterminant D en le multipliant par un autre qui est égal à 1.

$$D = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \xi & \eta & \zeta \\ u & v & w \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x\cos\varphi + y\sin\varphi & -x\sin\varphi + y\cos\varphi & z \\ \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi & -\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi & \zeta \\ u\cos\varphi + v\sin\varphi & -u\sin\varphi + v\cos\varphi & w \end{vmatrix}$$

ou

$$D = \begin{vmatrix} \rho & 0 & z \\ 0 & \sigma & 0 \\ \frac{d\rho}{dt} & 0 & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix} = \sigma\left(\rho\frac{dz}{dt} - z\frac{d\rho}{dt}\right).$$

Si nous portons cette valeur de D dans la relation (10), il vient :

$$\int D \, d\tau = \int D \rho \, d\omega \, d\varphi = \frac{T}{2}$$

$$2\pi \int D \rho \, d\omega = \frac{T}{2}.$$

(18) $$4\pi \int \sigma\rho d\omega \left(\frac{dz}{dt} - z\frac{d\rho}{dt}\right) = T \text{ [1]}.$$

126. Grandeur de la vitesse. — Soit un tube infiniment délié, de section circulaire, existant seul : son rayon demeure constant. La relation (17) :

$$\int \sigma\rho \frac{d\rho}{dt} d\omega = 0$$

exprime que :

$$\int \sigma\rho^2 d\omega = \text{const.}$$

En effet, si nous différentions cette dernière par rapport à t en remarquant que $\sigma d\omega$ représente le moment du tube et est constant, nous retrouvons l'équation (17) :

Posons :

(1) $$\int \sigma d\omega = M$$

(2) $$\int \sigma\rho^2 d\omega = MR^2.$$

M sera une constante, ainsi que MR^2.

Si σ a partout le même signe, R sera compris entre les valeurs extrêmes de ρ, ρ_0 et ρ_1.

En effet, soit ρ_0 la plus grande valeur de ρ :

$$MR^2 < \int \sigma\rho_0^2 d\omega$$

[1] Au lieu de cette équation, Helmholtz trouve, par suite d'une erreur de calcul :

$$4\pi \int \sigma\rho d\omega \left(\rho \frac{dz}{dt} - 2z\frac{d\rho}{dt}\right) = T;$$

la présence de ce facteur 2 ne change pas d'ailleurs les résultats que nous allons exposer et qui reposent seulement sur la considération de l'ordre de grandeur des différents facteurs.

ou :

$$MR^2 < \rho_0^2 \int \sigma d\omega = M\rho_0^2$$

$$R^2 < \rho_0^2;$$

on démontrerait de même que :

$$R^2 > \rho_1^2.$$

Par conséquent :

$$\rho_0 > R > \rho_1.$$

Si le tube est infiniment délié, ρ_0 et ρ_1 diffèrent très peu l'un de l'autre et très peu du rayon moyen du tube. Ce rayon moyen différera aussi très peu de R et pourra être regardé comme constant, de même que R. Le seul mouvement que puisse prendre le tube se réduit donc à un déplacement parallèle à Oz. Quelle sera la vitesse de ce déplacement? Il n'est pas évident *a priori* qu'elle sera constante, parce que la position du tube relativement à Oz ne change pas par le déplacement; la vitesse pourrait dépendre de la forme de la section.

Il n'en est rien : la vitesse est constante et très grande, ainsi que le montre Helmholtz en s'appuyant sur l'équation (3), et tenant compte de l'ordre de grandeur des quantités

$$T, u, v \text{ et } \frac{d\rho}{dt}.$$

Si la section du tube est infiniment déliée, un point situé à distance finie du tube aura une vitesse finie. Mais un point situé au voisinage de ce tube aura une très grande vitesse. Le rayon de la section du tube et la distance de ce point au bord de cette section seront toujours très petits vis-à-vis de R. On obtiendra une approximation suffisante en assimilant la

partie voisine du tube à un cylindre et lui appliquant les formules des tubes cylindriques.

127. Considérons un tube rectiligne infiniment délié. Pour déterminer la vitesse, nous remplaçons ce tube par un courant rectiligne indéfini. La vitesse est représentée par le même vecteur que la force magnétique : elle est donc en raison inverse de la distance du point considéré à l'axe du courant. En un point infiniment voisin de cette droite, la vitesse sera infiniment grande. Par conséquent la force vive T est infinie.

Le potentiel vecteur (F, G, H) est défini par les relations :

$$F = \int \frac{\xi}{2\pi}\, dl, \text{ etc.}$$

Supposons notre tube rectiligne parallèle à l'axe des x.

Dans le cas actuel $\frac{\xi}{2\pi}$ est une constante. F serait le potentiel d'une droite indéfinie électrisée uniformément. En un point infiniment voisin de la droite, ce potentiel est de l'ordre de $\log \rho$, si ρ est la distance du point à la droite.

128. Soit maintenant un tube circulaire ou le courant circulaire qui le remplace. Dans le plan normal à ce cercle au point O, je prends un point M très voisin de O. Je vais chercher la force magnétique et le potentiel vecteur engendrés au point M par le courant circulaire, et les comparer à ceux qu'engendrerait un courant rectiligne, dirigé suivant la tangente en O, et ayant même intensité que le courant circulaire.

Prenons le point O comme origine (*fig.* 32), la tangente comme axe des x, le diamètre OC comme axe des y. Le point M sera dans le plan des yz.

Supposons l'intensité du courant égale à l'unité. Soient ds un élément de courant, dx sa projection sur Ox, r la distance de ds au point M :

$$F = \int \frac{dx}{r}.$$

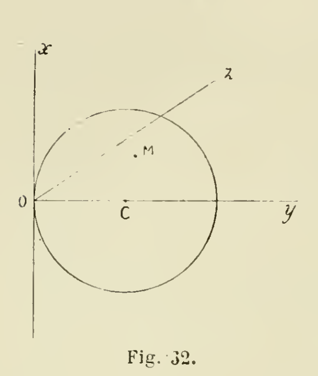


Fig. 32.

L'intégrale doit être prise de — R à + R, R étant le rayon du cercle.

Soient $PP' = ds$, et $P_1P_1' = dx$ la projection de PP' sur l'axe des x (*fig.* 33); r, la distance de P_1P_1' à M. Le potentiel vecteur dû au courant rectiligne a pour expression :

$$F_1 = \int \frac{dx}{r_1}.$$

L'intégrale devrait être prise de $-\infty$ à $+\infty$; mais, comme nous ne nous proposons que d'étudier l'ordre de grandeur de F_1, nous pourrons la prendre comme la première entre les limites — R et + R.

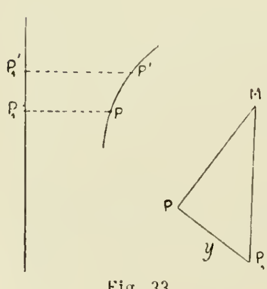


Fig. 33.

En effet, les éléments situés à distance finie de M donneraient dans l'expression de F_1 des termes finis, qui sont négligeables vis-à-vis des termes très grands donnés par les éléments voisins de M.

Il en résulte que nous avons le droit d'écrire

$$F - F_1 = \int dx \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Nous pouvons trouver une limite supérieure de l'élément de cette intégrale. Soient, en effet :

o, y_0, z_0 les coordonnées		de M
x, y, o	id.	de P
x, o, o	id.	de P_1.

Dans le triangle MPP_1

$$MP = r \qquad MP_1 = r_1 \qquad PP_1 = y.$$

Or :

$$\left|\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right| = \frac{r_1 - r}{rr_1}$$

est plus petit que :

$$(r_1 - r)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2}\right).$$

Comme $r_1 - r < y$, on a enfin :

$$\left|\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right| < y\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2}\right)$$

et :

$$F - F_1 < \int \frac{ydx}{r^2} + \int \frac{ydx}{r_1^2}.$$

D'ailleurs :

$$r^2 = \overline{MP}^2 = x^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2$$

$$\int \frac{ydx}{r^2} = \int \frac{ydx}{x^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2}$$

d'où :

$$\int \frac{y\,dx}{r^2} < \int \frac{y\,dx}{x^2}.$$

Quand le point P se rapproche indéfiniment de o, $\frac{y}{x^2}$ tend vers une limite finie 2R, R étant le rayon du cercle. L'intégrale $\int \frac{y\,dx}{r^2}$ et de même l'intégrale $\int \frac{y\,dx}{r_1^2}$ restent donc finies, par suite la différence $F - F_1$ est finie.

129. Ordre de grandeur du potentiel vecteur. — Puisque la différence $F_1 - F$ est finie, nous pouvons, pour chercher l'ordre de grandeur du potentiel vecteur, remplacer le tube circulaire par le tube rectiligne.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un tube unique, et que le tourbillon soit constant. Le tube rectiligne sera un cylindre à section circulaire. Le potentiel vecteur sera égal au potentiel d'une masse attirante distribuée sur le cylindre, et dont la densité serait égale à $\frac{\xi}{2\pi}$.

En un point extérieur au cylindre, le potentiel est le même que si toute la masse attirante était concentrée sur l'axe. Si ρ_0 est le rayon du cylindre, tout se passera en un point extérieur, c'est-à-dire en un point dont la distance à l'axe ρ est plus grande que ρ_0, comme s'il existait sur l'axe une matière attirante de densité :

$$\pi\rho_0^2 \frac{\zeta}{2\pi} = \frac{\zeta\rho_0^2}{2},$$

et le potentiel en ce point sera :

$$(3) \qquad \int \zeta\rho_0^2 \log \rho \quad (\rho > \rho_0).$$

Pour un point intérieur au cylindre, c'est-à-dire pour $\rho < \rho_0$, le potentiel s'obtient en décomposant le cylindre en deux parties par une surface cylindrique ayant même axe que lui et passant par le point considéré. La couche annulaire n'a aucune action sur le point : l'autre partie a même action que si toute la masse était concentrée sur son axe.

Par conséquent l'attraction est égale à :

$$-\frac{\zeta\rho_0^2}{\rho} \text{ pour } \rho > \rho_0$$

$$-\zeta\rho_0 \qquad \rho = \rho_0$$

$$-\zeta\rho \qquad \rho < \rho_0.$$

Le potentiel aura donc pour expression :

$$(4) \qquad -\frac{\zeta\rho^2}{2} + C,$$

les deux formules (3) et (4) devant concorder pour $\rho = \rho_0$. Cette condition détermine la constante C :

$$-\frac{\zeta\rho_0^2}{2} + C = -\zeta\rho_0^2 \log \rho_0$$

$$C = \zeta\rho_0^2\left(\frac{1}{2} - \log \rho_0\right).$$

Supposons le moment du tube $\zeta\rho_0$ fini. Si ρ_0 est très petit, C, et par conséquent, le potentiel vecteur sera de l'ordre de grandeur de $\log \rho_0$.

130. Ordre de grandeur de la force vive. — Soient P

le potentiel vecteur, σ le tourbillon, qui sont perpendiculaires au méridien. La force vive a pour expression :

$$I = \int \sigma P d\tau = \int \sigma P \rho d\omega d\varphi,$$

ou en intégrant par rapport à φ :

$$I = 2\pi \int \sigma P \rho d\omega.$$

Or $\int \sigma d\omega$ est fini ; c'est le moment du tube que nous regardons comme fini, par hypothèse. P est de l'ordre de $\log \rho_0$. La force vive sera aussi de cet ordre, et par conséquent très grande. Quant à la vitesse, elle est du même ordre de grandeur que l'attraction de notre cylindre considéré plus haut et par conséquent que $\frac{1}{\rho_0}$.

131. Vitesse du mouvement. — Posons :

$$A = \int \sigma \rho^2 z d\omega = MR^2 z_0 \tag{5}$$

en prenant :

$$MR^2 = \int \sigma \rho^2 d\omega = \text{const.} \tag{6}$$

z_0 sera l'ordonnée d'un point situé à l'intérieur de la section méridienne du tube. Soient en effet z_1 et z_2 les ordonnées extrêmes de cette section.

Je dis que :

$$z_1 > z_0 > z_2.$$

En effet :

$$\int \sigma \rho^2 z_1 d\omega = z_1 \int \rho^2 \sigma d\omega = z_1 MR^2.$$

D'autre part :

$$\int \sigma\rho^2 z d\omega < \int \sigma\rho^2 z_1 d\omega,$$

ou :

$$z_0 \mathrm{MR}^2 < z_1 \mathrm{MR}^2$$

et :

$$z_0 < z_1.$$

On démontrerait de la même manière que :

$$z_0 > z_2.$$

Différentions A par rapport à t, il vient :

$$\frac{d\mathrm{A}}{dt} = \mathrm{MR}^2 \frac{dz_0}{dt} = \int \sigma d\omega \left(2\rho z \frac{d\rho}{dt} + \rho^2 \frac{dz}{dt}\right),$$

car $\sigma d\omega$, qui représente le moment du tube, est une constante. D'autre part, de l'équation (3) [**125**] nous tirons :

$$\int \sigma\rho^2 \frac{dz}{dt} d\omega = \int \sigma\rho z \frac{d\rho}{dt} d\omega + \frac{\mathrm{T}}{4\pi}.$$

Par conséquent :

$$(7) \qquad \frac{d\mathrm{A}}{dt} = \mathrm{MR}^2 \frac{dz_0}{dt} = 3 \int \sigma\rho z \frac{d\rho}{dt} d\omega + \frac{\mathrm{T}}{4\pi}.$$

De l'équation (**1**) on déduit, en remarquant que z_0 est une constante :

$$(8) \qquad 0 = \int \sigma\rho \frac{d\rho}{dt} z_0 d\omega,$$

et en additionnant (7) et (8) :

$$\text{(9)} \qquad MR^2 \frac{dz_0}{dt} = 3\int \sigma\rho \frac{d\rho}{dt}(z - z_0)\, d\omega + \frac{T}{4\pi}.$$

Le premier terme du second membre est fini. En effet, $\int \sigma d\omega$ est fini de même que ρ ; $\frac{d\rho}{dt}$ est la composante de la vitesse suivant le rayon vecteur ; c'est une quantité très grande, du même ordre que $\frac{1}{\varepsilon}$; $z - z_0$ est plus petit que le diamètre ε de la section du tube ; donc $\frac{d\rho}{dt}(z - z_0)$ est fini.

On pourra donc négliger le premier terme devant le second et se borner à écrire :

$$\frac{dz_0}{dt} = \frac{T}{4\pi} \times \frac{1}{MR_0^2}.$$

Il résulte de cette équation que :

1° La vitesse $\frac{dz_0}{dt}$ est très grande, du même ordre de grandeur que la force vive T ;

2° Elle est sensiblement constante puisque T est constant ; le premier terme est variable, il est vrai ; mais nous avons montré qu'il est négligeable vis-à-vis de T.

Le tube tourbillonnaire se déplacera donc avec une vitesse très grande, parallèle à Oz.

132. Ordre de grandeur de la vitesse. — Démonstration directe. — La vitesse (u, v, w) est représentée, comme nous le savons, par le même vecteur que la force magnétique. Soient $AB = ds$ un élément de courant (*fig.* 34) ; P, un pôle

magnétique égal à l'unité. La force que l'élément AB exerce sur ce pôle est perpendiculaire au plan PAB et a pour expression :

$$\frac{AB' \times i}{r^2}.$$

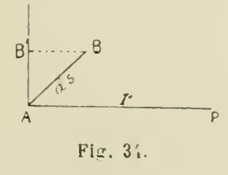


Fig. 34.

AB' étant la projection de AB sur une perpendiculaire PA ; i, l'intensité du courant, et r la distance AP.

En valeur absolue :

$$\frac{AB' \times i}{r^2} < \frac{ids}{r^2}.$$

Décomposons notre tube tourbillonnaire en éléments de volume et remplaçons chacun d'eux par un élément de courant. Si σ est l'intensité du tourbillon, nous devrons donner au courant une intensité $\frac{\sigma d\omega}{2\pi}$ [43], et par conséquent

$$ids = \frac{\sigma ds d\omega}{2\pi} = \frac{\sigma d\tau}{2\pi},$$

$d\omega$ étant l'élément de section, et $d\tau$ l'élément de volume du tube.

La vitesse aura donc pour limite supérieure :

$$\int \frac{\sigma d\tau}{2\pi r^2}.$$

Décomposons le tube en éléments de la manière suivante :

Du point P comme centre, décrivons des sphères concentriques : ces sphères découperont dans le tube des tranches ayant la forme de calottes sphériques. Considérons en parti-

culier une de ces tranches, limitées par les sphères de rayon r et $r + dr$, et l'intégrale

$$\int \frac{\sigma d\tau}{r^2}$$

étendue à tout le volume de cette tranche. Soit σ_1 la plus grande valeur que prenne σ dans la tranche; tous les éléments de l'intégrale ayant même signe :

$$\int \frac{\sigma d\tau}{r^2} < \int \frac{\sigma_1 d\tau}{r^2}.$$

r peut être regardé comme constant pour toute l'épaisseur de la tranche. Ce qui permet d'écrire :

$$\int \frac{\sigma d\tau}{r^2} < \frac{\sigma_1}{r^2} \int d\tau.$$

Or $\int d\tau$ est le volume de la tranche, qui en appelant λ la section de cette tranche est égal à λdr. Par suite :

$$\int \frac{\sigma d\tau}{r^2} < \frac{\sigma_1 \lambda dr}{r^2}.$$

Soit maintenant $d\omega$ un élément de la section du tube, et considérons le tube élémentaire engendré par la révolution autour de l'axe de cet élément $d\omega$, $d\lambda$ sera la section faite dans ce tube par la sphère de rayon r.

Je vais partager ces sphères en deux groupes : 1° celles dont le rayon est plus petit qu'une certaine limite supérieure au plus grand diamètre ε de la section du tube total. Par

exemple : je prendrai pour cette limite 2ε; 2° celles dont le rayon est supérieur à 2ε.

La limite supérieure de la vitesse devient alors :

$$(10) \qquad \int_0^{2\varepsilon} \frac{\sigma_1 \lambda dr}{r^2} + \int_{2\varepsilon}^{a} \frac{\sigma_1 \lambda dr}{r^2}.$$

Dans la première intégrale, λ est évidemment plus petit que $4\pi r^2$, surface entière de la sphère. Donc :

$$\int_0^{2\varepsilon} \frac{\sigma_1 \lambda dr}{r^2} < 4\pi \int_0^{2\varepsilon} \sigma_1 dr,$$

ou :

$$\int_0^{2\varepsilon} \frac{\sigma_1 \lambda dr}{r^2} < 8\pi\sigma_1\varepsilon.$$

Comme toujours, nous supposons le moment du tube de grandeur finie; $\sigma_1\Omega$ est fini. σ_1 est donc du même ordre de grandeur que $\frac{1}{\Omega}$, c'est-à-dire que $\frac{1}{\varepsilon^2}$ et $\sigma_1\varepsilon$ sera de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Dans la seconde intégrale :

$$d\lambda = \frac{d\omega}{\sin\theta}$$

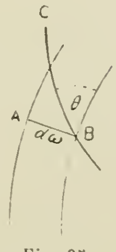


Fig. 35.

θ étant l'angle sous lequel la sphère coupe le tube (*fig.* 35); θ est toujours supérieur à une certaine limite θ_0, différente de O. En effet, aucune sphère du second groupe ne peut devenir tangente au tube; le contact aurait lieu dans la section méridienne, et le rayon de la sphère serait inférieur à ε.

Par suite :

$$d\lambda < \frac{d\omega}{\sin \theta_0}$$

et

$$\lambda < \frac{\Omega}{\sin \theta_0}$$

$$\int_{2\varepsilon}^{a} \frac{\sigma_1 \lambda dr}{r^2} < \int_{2\varepsilon}^{a} \frac{\sigma_1 \Omega}{\sin \theta_0} \frac{dr}{r^2};$$

le premier facteur $\frac{\sigma_1 \Omega}{\sin \theta_0}$ est fini ; le second,

$$\int_{2\varepsilon}^{a} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{a}.$$

L'intégrale est encore de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Les deux termes de l'expression (10) sont donc du même ordre que $\frac{1}{\varepsilon}$, et la vitesse est elle-même d'un ordre de grandeur au plus égal à celui de $\frac{1}{\varepsilon}$.

CHAPITRE VIII

CONDITIONS DE STABILITÉ DU MOUVEMENT PERMANENT

133. Mouvement permanent. — Supposons que le liquide soit indéfini et les tubes tourbillonnaires parallèles à Oz. Le mouvement sera évidemment permanent si les ζ sont fonctions seulement de la distance $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Autour de Oz, il y aura une série de couches concentriques à l'intérieur desquelles le tourbillon aura une valeur constante.

Soit M un point quelconque (*fig.* 36); la vitesse de ce point sera dirigée perpendiculairement au rayon vecteur OM, mené de l'origine à ce point. Au bout du temps dt le point M sera venu en M_1, situé à la même distance de O. M décrit donc une circonférence de centre O. Soient ζ la valeur du tourbillon au point M, à l'instant t; ζ', sa valeur en M_1 au temps $t + dt$; ζ_1, sa valeur en M au temps dt.

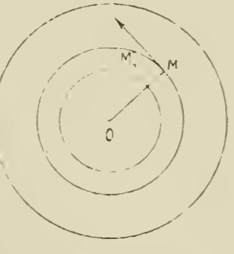


Fig. 36.

Je dis que :

$$\zeta = \zeta'.$$

En effet, la molécule, qui au temps d se trouvait en M, vient au temps $t + dt$ en M_1, sur le même tube. Or pour un même tube $\zeta = \text{const}$.

De même :

$$\zeta_1 = \zeta'.$$

En effet, au temps t, les deux points M et M_1 sont sur une même circonférence de centre O, et par hypothèse ζ ne dépend que de la distance au point O.

L'intensité du tourbillon en M_1 est donc constante. Comme M_1 est un point quelconque, il en est de même en tout autre point, et le mouvement est permanent.

134. Stabilité du mouvement. — Ce mouvement permanent est-il stable ?

Autrement dit, si une cause quelconque vient à déformer infiniment peu ces couches concentriques, cette déformation ira-t-elle en s'exagérant, ou bien le liquide tiendra-t-il à reprendre son état de mouvement primitif ?

Pour décider de cette question, il nous faut étudier les variations de la vitesse (u, v) dans ces transformations.

Nous avons trouvé d'une manière générale [**94**] :

$$u = -\frac{d\psi}{dy} \qquad v = \frac{d\psi}{dx}$$

en posant :

$$\psi = -\int \frac{\zeta' d\omega'}{\pi} \log \rho.$$

Si nous passons aux coordonnées polaires, en posant :

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi,$$

les composantes de la vitesse deviennent :

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{d\psi}{rd\varphi}$$
$$r\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi}{dr}.$$

135. Cas particulier. — Supposons qu'il existe un seul tube cylindrique dont la section droite soit un cercle, et qu'à l'intérieur de ce cercle ζ soit constant. La vitesse en un point quelconque sera ζr à l'intérieur du cylindre, et $\frac{\zeta r_0^2}{r}$ à l'extérieur, en appelant r_0 le rayon de la section droite.

D'ailleurs :

$$\psi = \zeta r_0^2 \log r.$$

Supposons que le cylindre subisse une petite déformation, le point M, par exemple, vient en M_1, et le rayon vecteur $OM = s$ devient une fonction du temps t et de l'angle φ qu'il fait avec un certain diamètre origine OX (*fig.* 37).

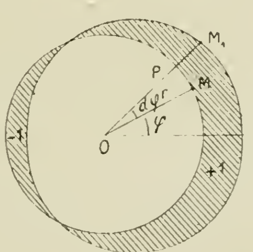


Fig. 37.

Au bout du temps dt le point M_1 sera venu en M_1', et ses coordonnées polaires φ et s auront subi des accroissements de :

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dt}dt = \frac{d\psi}{rdr}dt,$$

et

$$ds = -\frac{d\psi}{rd\varphi}dt.$$

D'autre part, comme s est fonction de φ et de t,

$$ds = \frac{ds}{d\varphi}d\varphi + \frac{ds}{dt}dt;$$

d'où, en remplaçant ds et $d\varphi$ par leurs valeurs et résolvant par rapport à $\frac{ds}{dt}$

$$(11) \qquad \frac{ds}{dt} = -\frac{d\psi}{rd\varphi} - \frac{d\psi}{rdr}\frac{ds}{d\varphi}.$$

Développons s suivant les multiples de φ d'après la formule de Fourier :

$$(12) \qquad s = r_0 + \sum a_n \cos n\varphi + \sum b_n \sin n\varphi.$$

La surface totale du tube ne doit pas avoir varié; donc le terme constant est égal à r_0 aux infiniment petits du second ordre près ; a_n et b_n sont des fonctions de t, indépendantes de φ et très petites, puisque nous avons supposé les transformations très petites. La fonction ψ est, à une constante près, le potentiel d'une matière attirante qui serait répandue dans tout le cylindre qui forme le tube, avec une densité $\frac{\zeta}{2\pi}\cdot$ Pour simplifier l'écriture, dans ce qui va suivre, nous supposons $\zeta = 1$.

Le potentiel ψ peut être considéré comme formé de deux parties : l'une, ψ_0, due au cylindre non déformé ; l'autre, $\delta\psi$, des parties déformées (ombrées sur la figure 38). L'épaisseur

de ces portions déformées étant très faible, le potentiel aura même valeur si, au lieu de leur attribuer une densite cubique constante, on leur donne une densité superficielle proportionnelle à leur épaisseur $s - r_0$.

Cette densité superficielle sera $\frac{s - r_0}{2\pi}$

$$(13) \qquad \frac{s - r_0}{2\pi} = \frac{\sum a_n \cos n\varphi + \sum b_n \sin n\varphi}{2\pi}.$$

Le potentiel $\delta\psi$ sera donc une fonction de r et de φ, et nous pourrons écrire :

$$\delta\psi = \sum c_n \cos n\varphi + \sum d_n \sin n\varphi.$$

Pour un point extérieur aux couches agissantes, $\delta\psi$ vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta\,(\delta\psi) = 0.$$

Par conséquent :

$$\Delta\,(c_n \cos n\varphi) = 0$$

$$\Delta\,(d_n \sin n\varphi) = 0$$

c_n et d_n étant des fonctions de r seulement,

$$c_n = c'_n\, r^n + c''_n\, r^{-n}$$

$$d_n = d'_n\, r^n + d''_n\, r^{-n}.$$

c'_n, c''_n, d'_n, d''_n sont des constantes.

Comme $\delta\psi$ ne doit pas devenir infini en même temps que r, il faut que :

$$c'_n = d'_n = 0.$$

Pour un point intérieur, la fonction est différente ; il faut

qu'elle reste finie pour $r = r_0$; donc à l'intérieur :

$$c''_n = d'_n = 0.$$

Il en résulte que, pour un point extérieur, nous devrons poser :

$$(14) \quad \delta\psi = \sum g_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cos n\varphi + \sum h_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \sin n\varphi$$

et pour un point intérieur :

$$(15) \quad \delta\psi = \sum g'_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\varphi + \sum h'_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \sin n\varphi.$$

Le potentiel reste continu quand on traverse la surface attirante; les deux formules (14) et (15) doivent donc donner la même valeur pour $r = r_0$; ce qui exige que :

$$g'_n = g_n \qquad h'_n = h_n.$$

Mais la force, quand on franchit la surface, eprouve une variation brusque égale au produit de la densité par 4π. Cette force a pour expression :

1° En un point extérieur :

$$(16) \quad \frac{d\delta\psi}{dr} = \sum - n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \frac{1}{r} (g_n \cos n\varphi + h_n \sin n\varphi ;$$

2° En un point intérieur :

$$(17) \quad \frac{d\delta\psi}{dr} = \sum n \left(\frac{r}{r^0}\right)^n \frac{1}{r} (g_n \cos n\varphi + h_n \sin n\varphi),$$

Pour $r = r_0$ la différence de ces deux expressions doit être égale à 4π multiplié par l'expression (13) de la densité.

D'où la relation :

$$-2\sum\frac{n}{r_0}(g_n\cos n\varphi+h_n\sin n\varphi)=2\sum(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi).$$

En identifiant les coefficients de $\cos n\varphi$ et de $\sin n\varphi$, il vient :

$$g_n=-\frac{a_n r_0}{n}$$

$$h_n=-\frac{b_n r_0}{n}.$$

Si nous substituons ces valeurs dans l'expression de $\delta\psi$, nous obtiendrons pour le potentiel :

1° En un point extérieur :

$$(18)\quad \psi=\psi_0+\delta\psi=\psi_0-\sum\frac{r_0\zeta}{n}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)\left(\frac{r_0}{r}\right)^n;$$

2° En un point intérieur :

$$(19)\quad \psi=\psi_0-\sum\frac{r_0\zeta}{n}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)\left(\frac{r}{r_0}\right)^n.$$

(en rétablissant le facteur ζ que nous avions supprimé).

Pour $r=r_0$, les deux formules se confondent et donnent toutes les deux (en supposant de nouveau $\zeta=1$) :

$$\psi=\psi_0-\sum\frac{r_0}{n}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)$$

de plus, l'équation (11) doit être vérifiée.

Or pour $r=r_0$ on a :

$$\frac{d\psi}{d\varphi}=\sum r_0(a_n\sin n\varphi-b_n\cos n\varphi)$$

$$\frac{d\psi}{rd\varphi}=\sum(a_n\sin n\varphi-b_n\cos n\varphi)$$

$$\frac{ds}{d\varphi}=r_0\sum(-na_n\sin n\varphi+nb_n\cos n\varphi).$$

$\frac{ds}{d\varphi}$ est un infiniment petit du premier ordre ; comme nous négligeons les infiniment petits du second ordre, il nous suffira de prendre, dans le coefficient de $\frac{ds}{d\varphi}$ les quantités finies.

A ce degré d'approximation, ce coefficient se réduit à :

$$\frac{d\psi_0}{r_0 dr_0} = 1.$$

Remplaçons dans l'équation (11) :

$$\frac{ds}{dt} = -\sum(a_n \sin n\varphi - b_n \cos n\varphi) - \sum(-na_n \sin n\varphi + nb_n \cos n\varphi)$$

$$= \sum \frac{da_n}{dt} \cos n\varphi + \frac{db_n}{dt} \sin n\varphi.$$

En identifiant, nous obtenons les conditions :

$$(20) \qquad \begin{aligned} \frac{da_n}{dt} &= (1-n) b_n. \\ \frac{db_n}{dt} &= -(1-n) a_n. \end{aligned}$$

Ces équations admettent comme intégrales :

$$(21) \qquad \begin{aligned} a_n &= \mathrm{A} \sin(1-n)\, t + \mathrm{B} \\ b_n &= \mathrm{A} \cos(1-n)\, t + \mathrm{B} \end{aligned}$$

Ces expressions montrent que, si a_n et b_n sont petits au temps $t = 0$, ils resteront toujours très petits. Le mouvement est donc stable.

136. Déformations particulières. — Soit une déformation telle que tous les coefficients soient nuls au début, sauf a_n et b_n : tous les autres resteront constamment nuls.

La courbe déformée aura comme équation :

$$(22) \qquad s = r_0 + a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi.$$

Le rayon vecteur présente donc n maxima et n minima, et la courbe, une série de festons (*fig.* 38).

Quand t varie, la courbe conserve la même forme, seulement elle semble tourner autour de Oz avec une vitesse égale à $(1 - n)\,\zeta$.

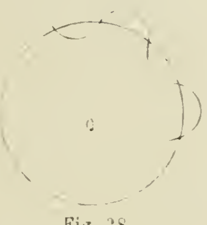


Fig. 38

Si la courbe était plus complexe, c'est-à-dire s'il y avait plus de deux coefficients différents de 0, on pourrait la décomposer en courbes simples correspondant chacune à une valeur de n et qui chacune tournerait autour de Oz avec sa vitesse particulière.

137. Supposons $n = 1$, il vient :

$$s = r_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi.$$

Cette équation, aux infiniment petits du second ordre près, représente un cercle dont le centre aurait pour coordonnées a_1 et b_1. Dans ce cas, $1 - n$ est égal à 0, donc .

$$\frac{da_1}{dt} = 0 \qquad \frac{db_1}{dt} = 0.$$

Le centre du cercle (a_1, b_1) est donc fixe.

Soit $n = 2$.

$$s = r_0 + a_2 \cos 2\varphi + b_2 \sin 2\varphi.$$

Aux infiniment petits du second ordre près, cette équation est celle d'une ellipse ayant son centre à l'origine et dont

l'excentricité est très faible ; d'autre part $1 - n = 1$. Donc :

$$a_2 = A \sin t + B$$
$$b_2 = A \cos t + B$$

l'ellipse paraîtra tourner d'un mouvement uniforme.

138. Ce théorème est encore vrai dans le cas d'une ellipse quelconque. Soit en effet ζ la valeur, supposée constante, du tourbillon à l'intérieur de l'ellipse.

Reprenons les coordonnées rectangulaires, en choisissant pour axes les axes de l'ellipse à un instant déterminé.

Les composantes de la vitesse sont :

$$u = -\frac{d\psi}{dy} \qquad v = \frac{d\psi}{dx}$$

ce seraient les composantes de l'attraction exercée par une matière attirante remplissant le cylindre et possédant une densité $\zeta/2\pi$ constante. Or nous pouvons considérer un cylindre elliptique comme un ellipsoïde dont un axe serait infini.

Soit un ellipsoïde homogène :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1.$$

Son attraction sur un point intérieur a pour composantes :

$$Ax, \qquad By, \qquad Cz,$$

A, B, C étant des constantes.

L'équation du cylindre se réduit à :

$$ax^2 + by^2 + = 1.$$

Donc :

$$\frac{d\psi}{dx} = Ax$$

$$\frac{d\psi}{dy} = By.$$

Au bout du temps dt, le point intérieur considéré aura subi un déplacement dont les composantes sont :

$$udt = -\frac{d\psi}{dy}\,dt = -\mathrm{B}ydt$$

$$vdt = -\frac{d\psi}{dx}\,dt = \mathrm{A}xdt.$$

Je puis toujours déterminer deux nombres α et β, tels que :

$$\mathrm{A} = \alpha + \beta a$$
$$\mathrm{B} = \alpha + \beta b$$

tant que $a \neq b$ et $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$.

Le déplacement se décompose alors en deux autres ayant respectivement pour composantes :

$$(1) \quad \begin{cases} -\beta bydt = dx \\ \beta axdt = dy \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} -\alpha ydt = dx \\ \alpha xdt = dy. \end{cases}$$

Le déplacement (1) n'altère pas la forme de l'ellipse. En effet, différentions l'équation de l'ellipse :

$$2axdx + 2bydy = -2ax\beta bydt + 2by\beta axdt = 0.$$

Le déplacement (2) représente une rotation autour de Oz. Au bout du temps dt et, par conséquent, au bout d'un temps quelconque l'ellipse a tourné sans déformation.

139. Tubes tourbillonnaires concentriques. — Considérons un tube tourbillonnaire limité par deux surfaces cylindriques C et C′, de révolution autour de Oz (*fig.* 39). Nous admettons qu'à l'intérieur du cylindre C, de rayon r_0, le tourbillon a une valeur constante $\zeta + \zeta'$; entre les deux cylindres, une autre valeur constante ζ' ; enfin à l'extérieur du cylindre C′, dont le rayon est r'_0, le tourbillon est nul.

L'effet de ces deux tubes concentriques sera égal à la somme des effets de deux tubes, dont l'un aurait un rayon r_0 avec une valeur du tourbillon égale à ζ, et l'autre un rayon r'_0 avec un tourbillon ζ'.

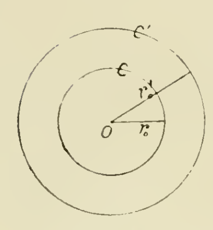


Fig. 39.

Chacun de ces tubes donnerait lieu à un mouvement permanent [**133**]; si on superpose leurs effets, le mouvement sera encore permanent.

140. Conditions de stabilité. — Ce mouvement sera-t-il stable ?

Pour nous en rendre compte, nous allons procéder par une méthode analogue à celle que nous avons précédemment employée.

Soit ψ_0 la valeur de ψ : ψ_0 ne dépend que de r, la vitesse est perpendiculaire au rayon vecteur et égale à $\frac{d\psi_0}{dr}$.

Si $r < r_0$, le point est intérieur aux deux cylindres, donc :

$$\frac{d\psi_0}{dr} = \zeta r + \zeta' r.$$

Si $r_0 < r < r'_0$, le point est extérieur au premier cylindre C et intérieur au second C', et :

$$\frac{d\psi_0}{dr} = \frac{\zeta r_0^2}{r} + \zeta' r.$$

Enfin, si $r > r'_0$, le point est extérieur aux deux cylindres, et :

$$\frac{d\psi_0}{dr} = \frac{\zeta r_0^2}{r} + \frac{\zeta' r_0'^2}{r}.$$

Pour $r = r_0$ et $r = r'_0$ ces formules deviennent :

$$\frac{d\psi_0}{dr_0} = (\zeta + \zeta')\, r_0$$

$$\frac{d\psi_0}{dr'_0} = \frac{\zeta r_0^2}{r'_0} + \zeta r'_0.$$

En posant $\frac{r'_0}{r} = \varepsilon$, il vient :

$$\frac{d\psi_0}{r_0 dr_0} = \zeta + \zeta'$$

$$\frac{d\psi_0}{r'_0 dr'_0} = \zeta\varepsilon^2 + \zeta'.$$

Imprimons à C et à C′ une petite déformation, de telle sorte que leurs rayons vecteurs deviennent respectivement :

$$s = r_0 + \sum a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi$$

$$s = r'_0 + \sum a'_n \cos n\varphi + b'_n \sin n\varphi.$$

Pour un tube seul, nous avons trouvé comme valeur de ψ, après la déformation :

$$\psi = \psi_0 - \sum \frac{r_0\zeta}{n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\pm n},$$

en convenant de donner à n un signe tel que ce facteur $\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\pm n}$ soit toujours < 1.

Pour les deux tubes, nous aurons :

$$\psi = \psi_0 - \sum \frac{r_0\zeta}{n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\pm n}$$
$$- \sum \frac{r'_0\zeta'}{n} (a'_n \cos n\varphi + b'_n \sin n\varphi) \left(\frac{r}{r'_0}\right)^{\pm n}.$$

Ecrivons, pour chacun des tubes, l'équation différentielle (11), il vient :

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{d\psi}{r_0 d\varphi} - (\zeta + \zeta')\frac{ds}{d\varphi}$$

$$\frac{ds'}{dt} = -\frac{d\psi}{r'_0 d\varphi} - (\zeta\varepsilon^2 + \zeta')\frac{ds'}{d\varphi}.$$

Développons les termes et identifions les coefficients de $\cos n\varphi$ et de $\sin n\varphi$ pour $r = r_0$ et $r = r'_0$. Nous trouverons ainsi les équations (en supprimant les indices n devenus inutiles) :

$$(23) \quad \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= b\zeta + b'\zeta'\varepsilon^{n-1} - nb(\zeta + \zeta') \\ \frac{da'}{dt} &= b\zeta\varepsilon^{n+1} + b'\zeta' - nb'(\zeta\varepsilon^2 + \zeta') \\ \frac{db}{dt} &= -a\zeta - a'\zeta'\varepsilon^{n-1} + na(\zeta + \zeta') \\ \frac{db'}{dt} &= -a\zeta\varepsilon^{n+1} - a'\zeta' + na'(\zeta\varepsilon^2 + \zeta'). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi quatre équations différentielles linéaires, à coefficients constants, pour déterminer les quatre inconnues a, b, a', b'. Les intégrales de ces équations se ramènent à des sommes d'exponentielles, de la forme $e^{\alpha t}$.

Si α est réel et positif, cette exponentielle croît indéfiniment avec le temps, et le mouvement est instable, puisque la déformation ira en s'accentuant.

Si les exponentielles sont de la forme $e^{-\alpha t}$, α étant réel et positif, la déformation tendrait vers O, et on pourrait croire que le mouvement est alors stable. Il n'en est rien cependant, car, l'équation caractéristique ayant ses racines égales et de

signe contraire, nous ne pourrons avoir d'exponentielles $e^{-\alpha t}$ sans avoir en même temps d'exponentielles $e^{+\alpha t}$.

Par conséquent, il y aura instabilité toutes les fois que l'équation caractéristique a une racine réelle.

Si les racines sont complexes, de la forme $\alpha + \sqrt{-1}\beta$, les exponentielles seront de la forme :

$$e^{\alpha+\sqrt{-1}\beta t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + \sqrt{-1}\sin\beta t),$$

et il y en aura encore au moins une dont le module croîtra indéfiniment. Le mouvement sera encore instable.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait stabilité est donc que toutes les racines de l'équation caractéristique soient de la forme :

$$\alpha\sqrt{-1}$$

α étant réel. Les intégrales sont alors une somme de termes tels que :

$$e^{\sqrt{-1}\alpha t} = \cos\alpha t + \sqrt{-1}\sin\alpha t,$$

qui restent finis.

Nous avons donc à chercher les conditions pour qu'il en soit ainsi.

Posons pour abréger :

$$\alpha = \zeta - n(\zeta + \zeta')$$
$$\beta = \zeta'\varepsilon^{n-1}$$
$$\gamma = \zeta\varepsilon^{n+1}$$
$$\delta = \zeta' - n(\zeta\varepsilon^2 +$$

Les équations (23) deviennent :

$$(24)\qquad \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \alpha b + \beta b' \\ \frac{da'}{dt} &= \gamma b + \delta b' \\ \frac{db}{dt} &= -\alpha a - \beta a' \\ \frac{db'}{dt} &= -\gamma a - \delta a'. \end{aligned}$$

Posons encore :

$$\lambda a + \lambda' a' = x$$
$$\lambda b + \lambda' b' = y,$$

λ et λ' étant deux nombres que nous nous réservons de déterminer convenablement.

Multiplions les deux premières équations (24) par λ et λ' et ajoutons-les, il vient :

$$\frac{dx}{dt} = b\,(\lambda\alpha + \lambda'\gamma) + b'\,(\lambda\beta + \lambda'\delta).$$

Je choisis maintenant λ et λ' de façon que le second membre se réduise à Sy.

λ et λ' seront donnés par les équations :

$$\lambda\alpha + \lambda'\gamma = S\lambda$$
$$\lambda\beta + \lambda'\delta = S\lambda'.$$

Si on a trouvé λ et λ' satisfaisant à ces conditions :

$$\frac{dx}{dt} = Sy.$$

En opérant de même sur les deux dernières équations du système (24), on trouverait :

$$\frac{dy}{dt} = -Sx.$$

Nous obtiendrons la valeur de S en écrivant que le déterminant des équations homogènes en λ et en λ' est nul.

S sera donc une racine de l'équation :

$$(25) \qquad \begin{vmatrix} \alpha - S & \gamma \\ \beta & \delta - S \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est du second degré; soient S et S_1 ses racines :

λ, λ', x, y les valeurs correspondantes à S

$\lambda_1, \lambda'_1, x_1, y_1$ » à S_1.

Nous aurons :

$$\lambda_1 a + \lambda'_1 a' = x_1$$
$$\lambda_1 b + \lambda'_1 b' = y_1$$
$$\frac{dx_1}{dt} = S_1 y_1$$
$$\frac{dy_1}{dt} = -S_1 x_1.$$

L'intégrale générale de nos équations sera alors :

$$x = A \sin(St + B)$$
$$y = A \cos(St + B)$$
$$x_1 = A_1 \sin(S_1 t + B)$$
$$y_1 = A_1 \cos(S_1 t + B).$$

Si S est réel, le sinus et le cosinus restent finis, et il y a stabilité.

Si S est imaginaire, $S = s + \sqrt{-1}u$,

$$\sin St = e^{ut}(\cos st + \sqrt{-1} \sin st).$$

Le module croît indéfiniment avec t; le mouvement est donc instable.

La condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement soit stable est donc que les racines S soient réelles.

Développons l'équation en S :

$$S^2 - S(\alpha + \delta) + \alpha\delta - \beta\gamma = 0.$$

Les racines seront réelles si :

$$(\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) > 0$$

ou

$$(\alpha + \delta)^2 + 4\beta\gamma > 0.$$

Remplaçons α, β, γ, δ par leurs valeurs :

$$[\zeta - n(\zeta + \zeta') - \zeta' + n(\zeta\varepsilon^2 + \zeta')]^2 + 4\zeta\zeta'\varepsilon^{2n} > 0.$$

Cette inégalité doit être vérifiée pour toutes les valeurs entières de n.

Remarquons d'abord que, si les tourbillons ζ et ζ' sont de même signe, cette inégalité a toujours lieu. Dans ce cas, le mouvement est toujours stable.

141. Nous ne ferons pas la discussion complète de l'inégalité. Nous considérerons seulement le cas particulier où .

$$\zeta\varepsilon^2 + \zeta' = 0.$$

Cette condition exprime que la vitesse $(\zeta\varepsilon^2 + \zeta')\frac{r_0'^2}{r}$, en un point extérieur à C', est nulle avant la déformation. Choisis-

sons les unités de manière que $\zeta = 1$; alors $\zeta' = - \varepsilon^2$. Le mouvement sera stable si l'inégalité énoncée est vérifiée pour toutes les valeurs de n. En écrivant qu'elle est vraie pour $n = 2$, nous aurons une condition nécessaire de la stabilité :

$$[1 - 2(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon^2]^2 - 4\varepsilon^6 > 0$$

ou

$$(1 - \varepsilon^2)^2 (1 - 4\varepsilon^2) > 0.$$

Le premier facteur étant essentiellement positif, il faut que :

$$1 - 4\varepsilon^2 > 0,$$

ou comme ε est positif

$$\varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Par suite, si le rayon du cylindre intérieur C est plus grand que la moitié du rayon du cylindre extérieur C', il ne pourra y avoir stabilité.

142. Explication d'un fait expérimental. — Imaginons que, dans un liquide, il existe deux courants de sens contraires ou seulement de vitesses différentes. Les deux masses liquides animées de vitesses différentes frotteront l'une contre l'autre, et il naîtra à la surface de séparation de petits tourbillons. Ordinairement on se contente de dire, pour expliquer la production de ces tourbillons, qu'ils sont dus au frottement des deux veines liquides. Cette explication n'est pas suffisante. En effet, à l'origine nous avons deux masses liquides, animées de vitesses différentes, que, pour plus de simplicité, nous considérerons comme constantes en grandeur et en direction. Cet état ne peut subsister à cause des frotte-

ments dus à la viscosité du liquide. Mais il semble d'abord qu'il devrait se produire une couche de passage dans laquelle la vitesse varierait graduellement, et dans laquelle les tourbillons seraient répartis uniformément. Or ce n'est pas cette apparence qu'on observe, mais on voit se former de petits tourbillons qui paraissent avoir une tendance à se ramasser en tubes séparés. Cela tient à ce que, dans les conditions où nous nous sommes placés, l'état où les tourbillons seraient répartis uniformément est instable, comme nous pouvons le montrer en nous appuyant sur ce qui précède.

Soit, en effet, un cylindre C : imprimons à tout le liquide contenu à l'intérieur de ce cylindre une vitesse de rotation uniforme $(\zeta + \zeta')$, le liquide extérieur restant en repos. La vitesse sera discontinue à la surface du cylindre, et par suite du frottement il va se produire une zone de passage, qui sera limitée par deux cylindres concentriques à C.

Comme dans le cas que nous avons étudié, il y aura donc deux cylindres concentriques; à l'intérieur du premier la valeur du tourbillon est $\zeta + \zeta'$; à l'extérieur du second, le tourbillon est nul; enfin, dans la zone annulaire, il varie graduellement. Pour plus de simplicité, toutefois, je supposerai que ce tourbillon a dans cette zone annulaire une valeur constante intermédiaire entre O et $\zeta + \zeta'$: soit ζ' cette valeur. Posons :

$$\zeta + \zeta' = a.$$

et attribuons à ζ' une valeur moyenne constante, comme dans l'exemple précédent, telle que :

$$\zeta \varepsilon^2 + \zeta' = 0,$$

ce qui exprime que le liquide est en repos à l'extérieur.

Nous tirons de là :

$$\zeta' = \frac{a\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Comme la zone de passage est très mince au début, ε est très voisin de 1 et ζ' très grand. Seulement, ε étant plus grand que $\frac{1}{2}$, ces conditions sont instables d'après ce que nous avons vu [**141**].

Supposons que le liquide extérieur, au lieu d'être en repos, possède une certaine vitesse b. Alors :

$$\zeta\varepsilon^2 + \zeta' = b.$$

il y a encore frottement, puisque la vitesse est discontinue ; en portant les valeurs de ζ et de ζ' dans les inégalités de condition, nous trouverions encore qu'il y a instabilité.

CHAPITRE IX

FLUIDES PRÉSENTANT UNE SURFACE LIBRE

143. Jusqu'ici nous n'avons étudié que le mouvement des liquides indéfinis ou remplissant complètement le vase dans lequel ils sont renfermés. Nous allons nous occuper maintenant du cas où les liquides ne remplissent plus complètement les vases et possèdent une surface libre en contact avec un autre fluide.

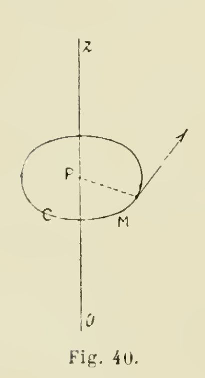


Fig. 40.

Imaginons que les molécules décrivent des circonférences dont le centre soit sur l'axe des z, et le plan perpendiculaire à cet axe. Si un tel mouvement est possible, il sera nécessairement permanent.

Si la pression et la densité sont les mêmes tout le long de l'une des circonférences, l'équation de continuité est vérifiée. Tout le système est de révolution autour de Oz, à un instant quelconque, la vitesse d'une molécule M (*fig.* 40) est dirigée suivant la tan-

gente à la circonférence C, et elle a même grandeur pour tous les points de cette circonférence.

Prenons dans le plan ZOM un petit élément de surface : dans la révolution autour de Oz cet élément engendre une petite surface. Le fluide qui occupe le volume limité par cette surface éprouve une rotation autour de Oz et son volume n'est pas altéré.

Posons :

$$\mathrm{MP} = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La pression p et la densité ρ sont fonctions seulement de r et de z, d'après les hypothèses que nous avons faites. Par conséquent :

$$w = 0$$

$$ux + vy = 0$$

Le demi-carré de la vitesse

$$\mathrm{T} = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

sera aussi une fonction de r et de z seulement.

Si la pesanteur est la seule force extérieure, qui agisse sur le fluide (l'axe des z étant vertical), nous avons posé [**4**] :

$$\mathrm{V} = gz$$

$$\psi = -\int \frac{dp}{\rho} + \mathrm{V}.$$

La fonction ψ existe à condition que ρ ne soit fonction que de p. C'est ce qui arrive si le fluide est un liquide homogène ou un gaz qui éprouve des transformations isothermiques ou adiabatiques.

Dans le système de notations de Lagrange, les composantes de l'accélération ont pour expression :

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{du}{dt} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{dv}{dt} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial w}{dt}. \end{aligned}$$

(Voir § 4.)

D'autre part, si une molécule décrit une circonférence d'un mouvement uniforme, l'accélération se réduit à l'accélération normale :

$$\frac{u^2 + v^2}{r} = \frac{2T}{r}$$

dirigée suivant MP. Ses composantes sont :

$$-\frac{2T}{r}\frac{x}{r}, \qquad -\frac{2T}{r}\frac{y}{r}, \qquad 0.$$

D'ailleurs :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{dr}{dx}$$

et par suite :

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= -\frac{2T}{r} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Il faut donc que ψ ne dépende que de r : il en sera de même de $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ et de T. La vitesse ne dépend pas de z, et les tubes tourbillonnaires sont des cylindres de révolution autour de Oz.

144. Cas particuliers simples. — Étudions d'abord quelques cas particuliers simples :

1° La vitesse est inversement proportionnelle à la distance r : alors T est inversement proportionnel à r^2, ou

$$T = \frac{\alpha}{r^2}$$

α étant une constante.

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{2\alpha}{r^3}$$

et en intégrant, il vient

$$\psi = \frac{\alpha}{r^2} + C = T + C.$$

Donc :

(3) $$\psi - T = \text{const.}$$

Nous retrouvons l'équation de Bernouilli, ce qui était facile à prévoir. Cette équation a été démontrée, en effet (**24-25**), dans le cas où il existe une fonction des vitesses, c'est-à-dire où le tourbillon est nul et où par conséquent la vitesse varie comme $\frac{1}{r}$. Actuellement nous supposons qu'il y a seulement un tube de tourbillon, ayant Oz pour axe, et en dehors duquel le tourbillon est nul : nous sommes donc placés dans les conditions énoncées.

145. 2° La vitesse est proportionnelle à la distance r, autrement dit le liquide possède un mouvement de rotation autour de l'axe des z, avec une vitesse angulaire constante :

il se meut à la façon d'un corps solide. On a évidemment :

$$T = \alpha r^2$$

$$\frac{d\psi}{dr} = - 2\alpha r$$

$$\psi = - \alpha r^2 + \text{const.}$$

ou

$$\psi + T = \text{const.} \tag{4}$$

Ce résultat était aussi à prévoir.

Rappelons, en effet, que nous avons appelé J [**5**] l'intégrale :

$$J = \int u dx + v dy + w dz$$

prise le long d'un arc de courbe. Nous avons démontré que :

$$\frac{dJ}{dt} = \int (d\psi + dT)$$

$d\psi + dT$ étant une différentielle exacte, $\frac{dJ}{dt}$ est nul quand la courbe d'intégration est fermée. Ici, d'après l'équation (4),

$$\psi + T = \text{const.}$$

ou

$$\frac{dJ}{dt} = 0$$

même quand la courbe d'intégration n'est pas fermée.

En effet, nous avons admis que le liquide tournait d'un mouvement uniforme autour de Oz ; la courbe d'intégration tourne aussi autour de Oz, sans se déformer. Menons au point M (*fig.* 41) un vecteur MV représentant la vitesse. En

considérant ce vecteur comme une force, J est le travail qu'effectuerait cette force pendant que le point parcourt la courbe d'intégration AB. Quand cette courbe, dans sa révolution autour de Oz, a pris la position A'B', le vecteur M'V' a conservé la même grandeur et la même position relativement à A'B' : M'V' s'obtiendrait, en effet, en faisant tourner MV autour de Oz, jusqu'à amener M en M'. Le travail J de la force M'V', quand le point M' parcourt A'B', est donc le même que le travail de la force MV quand le point M décrit AB.

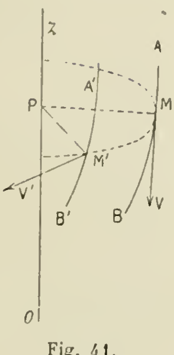


Fig. 41.

146. Forme de la surface libre. — Supposons que la seule force extérieure agissant sur le fluide soit la pesanteur.

Prenons pour axe des z la verticale, en comptant z positivement vers le haut. Dans ces conditions :

$$V = -gz$$

$$\psi = -gz - \int \frac{dp}{\rho}.$$

Si le fluide est un liquide homogène :

$$\rho = \text{const.}$$

et

$$\psi = -gz - \frac{p}{\rho}. \tag{5}$$

S'il s'agit d'un gaz dont la température est constante, la densité ρ est proportionnelle à la pression, et en désignant

par β une constante :

$$\rho = \beta p$$

$$(6) \qquad \psi = -gz - \frac{1}{\beta} \mathcal{L} . p.$$

Enfin, pour un gaz qui subit des transformations adiabatiques :

$$\rho = \beta p^{\gamma}$$

en appelant γ le rapport $\frac{c}{C}$ de la chaleur spécifique sous volume constant c à la chaleur spécifique sous pression constante C. Alors :

$$(7) \qquad \psi = -gz - \frac{1}{\beta(1-\gamma)} p^{1-\gamma}.$$

146 *bis*. Soit un liquide homogène sur la surface libre duquel s'exerce la pression atmosphérique. Si nous appelons p l'excès de la pression réelle sur la pression atmosphérique, il faut faire dans l'équation (5) :

$$p = 0$$

et écrire :

$$(8) \qquad \psi = -gz.$$

ψ est une fonction de r, et cette équation est celle de la surface libre du liquide.

Supposons qu'il existe un seul tube tourbillonnaire, ayant la forme d'un cylindre de révolution autour de Oz ; le tourbillon est constant à l'intérieur de ce cylindre, et nul à l'extérieur. Le cylindre possèdera donc un mouvement de rotation uniforme.

Soit r_0 son rayon ; à l'intérieur de sa surface, c'est-à-dire pour $r < r_0$, la vitesse est proportionnelle à r, et

$$T = \alpha r^2.$$

A l'extérieur, pour $r > r_0$, il y a une fonction des vitesses et

$$T = \frac{\alpha'}{r^2}.$$

Ces deux expressions de T doivent prendre la même valeur en un point de la surface du cylindre, c'est-à-dire pour $r = r_0$. Donc :

$$\alpha r_0^2 = \frac{\alpha'}{r_0^2},$$

d'où :

$$\alpha' = \alpha r_0^4.$$

Calculons au moyen de ces expressions les valeurs de ψ.

A l'intérieur :

$$\psi + T = \text{const},$$

donc :

$$\psi = -\alpha r^2 + C;$$

et à l'extérieur :

$$\psi - T = \text{const},$$

donc :

$$\psi = \frac{\alpha r_0^4}{r^2} + C'.$$

Ces formules doivent donner la même valeur de ψ quand on y fait $r = r_0$. Ce qui donne une relation entre les constantes C et C' :

$$-\alpha r_0^2 + C = \frac{\alpha r_0^4}{r^2} + C'.$$

Je puis disposer arbitrairement de la constante C′ : changer sa valeur revient en effet à déplacer le plan des xy parallèlement à lui-même, ce qui a simplement pour effet d'ajouter une constante à z et, par suite, à ψ. Je vais prendre $C' = 0$. D'après ce choix, nous aurons pour $r = \infty$:

$$\psi = 0,$$

et par conséquent :

$$z = 0.$$

La surface libre du liquide admet donc un plan asymptotique ; c'est le plan que nous avions choisi pour plan des xy ; c'est le niveau du liquide à une distance très grande de l'axe. L'équation de la surface libre, rapportée à l'axe de rotation et au plan asymptotique, sera donc :

1° A l'intérieur du tube tourbillonnaire :

$$gz = -\alpha\,(r^2 - r_0^2)\,; \tag{9}$$

2° A l'extérieur de ce tube :

$$gz = -\frac{\alpha r_0^4}{r^2}. \tag{10}$$

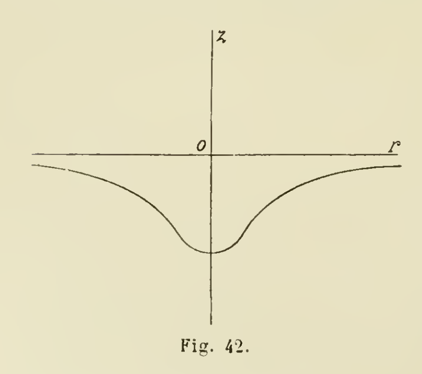


Fig. 42.

La première représente un paraboloïde : à l'intérieur du tube, la méridienne de la surface libre sera un petit arc de parabole.

La seconde équation représente une surface dont la méridienne est formée de deux branches asymptotes à l'axe des z (*fig.* 42). Les deux courbes se raccordent sur la section du tube de tourbillons.

Remarquons que z est toujours négatif; par conséquent, la surface libre est située tout entière au-dessous du plan des xy.

Cette circonstance ne tient pas aux hypothèses particulières que nous avons faites ; c'est un fait général, comme je vais le montrer.

En effet : ψ est nul pour $r = \infty$. Donc :

$$\psi = \int_{+\infty}^{r} - 2T\frac{dr}{r} = \int_{r}^{+\infty} 2T\frac{dr}{r}.$$

T et r étant essentiellement positifs, il en sera de même de ψ et, par conséquent, z sera négatif, d'après l'équation (8).

Ce résultat ne paraît pas conforme à l'observation. Tous ceux en effet qui ont eu l'occasion d'observer des trombes affirment que le liquide est au contraire soulevé, vers le centre du tourbillon, de manière à former une sorte de bourrelet au-dessous de la surface libre. Ce désaccord entre le calcul et l'observation tient probablement en partie à ce que, dans le calcul, nous avons admis que la pression était uniforme à la surface du liquide; cette condition n'est probablement pas remplie dans le cas d'une trombe; il est douteux cependant que cette hypothèse ait une influence assez grande sur le résultat du calcul, pour faire disparaître la difficulté que nous venons de signaler.

147. Distribution de la pression dans un gaz. — Si le fluide en mouvement est un gaz, nous déterminerons son état en étudiant la manière dont varie la pression p dans un plan parallèle au plan des xy. Si le gaz conserve une température constante, il faut se servir de la formule (6), et on

trouve dans le plan $z = z_0$:

$$\mathcal{L}.p = -\beta g z_0 - \beta\psi.$$

ψ devient nul à l'infini : soit p_0 la valeur correspondante de p :

$$\mathcal{L}p_0 = -\beta g z_0,$$

d'où :

$$\mathcal{L}.\frac{p}{p_0} = -\beta\psi.$$

Le second membre est négatif, car ψ est toujours positif, comme nous venons de le voir ; $\frac{p}{p_0}$ est donc plus petit que 1, et par conséquent il y a dépression dans l'intérieur du tourbillon.

Si le gaz subit une transformation adiabatique, c'est la formule (7) qui convient. Dans le plan $z = z_0$, la pression p sera donnée par :

$$p^{1-\gamma} = -\beta(1-\gamma)z_0 - \beta(1-\gamma)\psi.$$

A l'infini, ψ est nul et p est égal à p_0; par conséquent

$$p_0^{1-\gamma} = -\beta(1-\gamma)z_0,$$

d'où :

$$p^{1-\gamma} - p_0^{1-\gamma} = -\beta(1-\gamma)\psi.$$

Les quantités β, $1-\gamma$, ψ sont positives, par conséquent

$$p^{1-\gamma} - p_0^{1-\gamma} < 0,$$

ou

$$p < p_0.$$

Il y a encore dépression dans l'intérieur du tourbillon.

148. Cas de plusieurs liquides superposés. — Forme des surfaces de séparation. — Supposons qu'il n'y ait que deux liquides. Soient ρ_1 la densité du premier, p_1 sa pression, ρ_2 et p_2 la densité et la pression du second ; soient ψ_1 et ψ_2 les fonctions ψ relatives aux deux liquides :

$$\psi_1 = -gz_1 - \frac{p_1}{\rho_1}$$

$$\psi_2 = -gz_2 - \frac{p_2}{\rho_2}.$$

A la surface de séparation $z_1 = z_2$, et les pressions doivent être égales $p_1 = p_2$. Mais nous ne savons sur ψ_1 et ψ_2 qu'une chose, c'est que leurs dérivées $\frac{d\psi_1}{dr}$ et $\frac{d\psi_2}{dr}$ doivent avoir la même valeur. De cette condition

$$\frac{d\psi_1}{dr} = \frac{d\psi_2}{dr}$$

on déduit :

$$\psi_1 - \psi_2 = \text{const},$$

ou

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) p = \text{const.}$$

La pression est donc constante sur la surface de séparation, et cette surface aura même forme que la surface libre.

CHAPITRE X

INFLUENCE DE LA VISCOSITÉ DES FLUIDES

149. Hypothèses. — Notations. — Lorsqu'il s'agit d'un liquide visqueux, c'est-à-dire dont les molécules ne peuvent se mouvoir qu'avec un certain frottement les unes contre les autres, il n'existe plus de fonction des forces ; les forces de frottement dépendent en effet de la vitesse. Le théorème de Helmholtz, tel que nous l'avons démontré, n'est donc plus applicable.

Jusqu'aujourd'hui, on n'a pu soumettre ce cas au calcul qu'en s'appuyant sur certaines hypothèses, plus ou moins vraisemblables, mais qui sont généralement adoptées.

On admet d'abord que la force due à la viscosité a pour composante :

$$K\Delta u, \qquad K\Delta v, \qquad K\Delta w,$$

dans le système des variables de Lagrange, K étant une constante.

Ensuite on admet qu'à la surface du vase le liquide est en

repos, autrement dit que :

$$u = v = w = 0 ;$$

enfin que sur un élément $d\omega$ de cette surface agissent des forces superficielles, dont les composantes sont :

$$K \frac{du}{dn} d\omega, \qquad K \frac{dv}{dn} d\omega, \qquad K \frac{dw}{dn} d\omega.$$

Supposons que les forces extérieures agissant sur le liquide admettent une fonction des forces V. Les équations de Lagrange (1) deviendront, en y introduisant la force de viscosité :

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\rho \partial x} &= -\frac{du}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} + K\Delta u \\ \frac{\partial p}{\rho \partial y} &= -\frac{dv}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} + K\Delta v \\ \frac{\partial p}{\rho \partial z} &= -\frac{dw}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} + K\Delta w. \end{aligned}$$

Lorsqu'un élément de volume $d\tau$ du liquide subit un déplacement dont les projections sont dx, dy, dz, le travail effectué par les forces qui admettent la fonction V sera

$$\rho d\tau dV,$$

et en y ajoutant le travail de la force de viscosité, on obtient le travail réel :

$$d\varpi = \rho d\tau \left[dV + K(\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz)\right].$$

Nous poserons encore :

$$d\varpi = \rho d\tau . dV'$$

où

$$(2) \qquad dV' = dV + K(\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz).$$

Seulement, il est essentiel de remarquer que cette notation dV' n'a qu'une signification purement symbolique, car dV' n'est plus une différentielle totale.

Ensuite, nous écrirons :

$$(3) \qquad d\psi = dV' - \frac{dp}{\rho}$$

et nous retrouverons les équations (1) sous une forme simplifiée, analogue à celle que nous avions obtenue au § 4.

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{du}{dt} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{dv}{dt} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{dw}{dt} \end{aligned}$$

en remarquant, comme plus haut, qu'il s'agit seulement de symboles : $d\psi$ n'est pas une différentielle totale, mais est défini par la relation (3) ; $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}$ ne sont pas les dérivées d'une même fonction $\psi(x, y, z)$, mais seulement les coefficients de dx, dy, dz dans l'expression de $d\psi$.

150. Le théorème de Helmholtz (**5-6**) s'exprime par la relation :

$$(5) \qquad \frac{dJ}{dt} = \int_C (d\psi + dT) = 0.$$

L'intégrale prise le long d'une courbe formée est nulle,

quand $d\psi + d\mathrm{T}$ est une différentielle totale, c'est-à-dire quand il s'agit d'un fluide non visqueux.

Mais, si on ne néglige pas la viscosité, $d\psi + d\mathrm{T}$ n'est plus une différentielle totale. D'après les relations (2) et (3), on a alors :

$$(6) \quad \frac{d\mathrm{J}}{dt} = \int \left(d\mathrm{V} - \frac{dp}{\rho} + d\mathrm{T}\right) + \mathrm{K}\int (\Delta u dx + \Delta v \Delta y + \Delta w \Delta z).$$

La première intégrale étendue à un contour formé est nulle, d'après le théorème de Helmholtz (6). Il reste donc :

$$(7) \qquad \frac{d\mathrm{J}}{dt} = \mathrm{K}\int (\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz).$$

Faisons passer par le contour d'intégration C une surface fermée quelconque. La courbe C limite une certaine aire A. Soient l, m, n les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\omega$ de l'aire A. Nous avons trouvé, en appliquant le théorème de Stokes (8) :

$$\mathrm{J} = 2\int (l\xi + m\eta + n\zeta)\, d\omega$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de l'aire A; ξ, η, ζ étant définis par les relations (1) du § 9.

Transformons l'intégrale (7) par le même théorème, il vient :

$$\int \Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz$$

$$= \int d\omega \left[l\left(\frac{d\Delta w}{dy} - \frac{d\Delta v}{dz}\right) + m\left(\frac{d\Delta u}{dz} - \frac{d\Delta w}{dx}\right) + n\left(\frac{d\Delta v}{dx} - \frac{d\Delta u}{dy}\right)\right].$$

Remarquons qu'on peut intervertir l'ordre des différentia-

tions et écrire :

$$\frac{d\Delta w}{dy} = \Delta \frac{dw}{dy}$$

$$\frac{d\Delta v}{dz} = \Delta \frac{dv}{dz}$$

ou en retranchant membre à membre :

$$\frac{d\Delta w}{dy} - \frac{d\Delta v}{dz} = \Delta \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right) = 2\Delta\xi.$$

En transformant de même les autres termes, on arrive finalement à la formule :

$$\text{(8)} \qquad \frac{dJ}{dt} = 2K \int (l\Delta\xi + m\Delta\eta + n\Delta\zeta)\, d\omega.$$

151. Conditions nécessaires pour que le théorème de Helmholtz soit encore applicable. — Nous avons démontré [**14**] que, d'après le théorème de Helmholtz, les surfaces de tourbillon et, par conséquent, les lignes de tourbillon se conservent dans le mouvement du liquide, si on néglige les forces de viscosité ou de frottement. Si on tient compte de ces dernières forces, il peut n'en être plus de même en général. Le théorème ne sera plus vrai que dans des conditions particulières que nous nous proposons de déterminer.

Le théorème de Helmholtz [**6**] s'exprime par la condition :

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

Le long d'une courbe tracée sur une surface de tourbillon,

$$J = 0$$

puisque tout le long de cette courbe le tourbillon est représenté par un vecteur tangent à la surface.

Pour que $\frac{dJ}{dt}$ reste nul quand on introduit les forces de viscosité, il faut que :

$$l\Delta\xi + m\Delta\eta + n\Delta\zeta = 0$$

d'après l'équation (7).

Cette relation exprime que le vecteur $(\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta)$ se trouve dans le plan de l'élément $d\omega$. Traçons ce vecteur : s'il est tangent à la surface $J = 0$ et au bout du temps dt, on a encore $J = 0$. Puisque $\frac{dJ}{dt} = 0$, la surface de tourbillon est conservée. Si nous voulons que les lignes de tourbillon se conservent, il faut qu'un élément quelconque de ces lignes reste constamment tangent au vecteur tourbillon. Il est nécessaire alors que le plan de l'élément $d\omega$ contienne à la fois les deux vecteurs, et comme cela doit avoir lieu pour un élément $d\omega$ *quelconque* passant par le tourbillon, il faut que ces deux vecteurs se confondent en direction, autrement dit que :

$$\frac{\Delta\xi}{\xi} = \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta\zeta}{\zeta}. \tag{9}$$

En général, cette condition ne sera pas remplie et les lignes de tourbillon ne se conserveront pas.

152. Dans le cas particulier où il existe une fonction de vitesses, le tourbillon est nul, on a donc :

$$\xi = \eta = \zeta = 0,$$

et par suite $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$ sont identiquement nuls. Pour une

courbe quelconque, nous pouvons écrire :

$$J = 0 \qquad \frac{dJ}{dt} = 0.$$

Et la fonction des vitesses subsistera donc à un instant quelconque.

Cette conséquence de nos raisonnements paraît constituer une objection contre les hypothèses qui leur ont servi de point de départ.

153. Cas particuliers où les lignes de tourbillon se conservent. — Supposons que dans un liquide indéfini les lignes de tourbillon soient des droites parallèles à l'axe des z, ζ et η sont nuls, ainsi que $\Delta\xi$ et $\Delta\eta$: mais ζ et $\Delta\zeta$ sont différents de O. Les conditions (9) sont remplies, et les lignes de tourbillon se conservent. Il suffit d'ailleurs, pour le démontrer, de s'appuyer sur des considérations de symétrie.

Considérons, en effet, un plan quelconque parallèle au plan des xy. Ce plan est un plan de symétrie, que l'on tienne compte ou non du frottement. Si, au début du mouvement, les lignes de courant sont planes et situées dans des plans parallèles au plan des xy, elles resteront toujours dans ces plans par raison de symétrie, indépendamment du frottement.

Seulement, dans les conditions actuelles, ζ ne conserve plus sa valeur, et $\frac{dJ}{dt}$ n'est plus nul.

Prenons, en effet, comme contour d'intégration, la section droite d'un tube tourbillonnaire. En raison de ce choix, il faut faire :

$$l = m = 0 \qquad n = 1,$$

et il vient :

$$J = 2\int \zeta d\omega \tag{10}$$

$$\frac{dJ}{dt} = -2K\int \Delta\zeta d\omega. \tag{11}$$

La section du tube $d\omega$ est constante : en effet, le volume limité par ce tube et deux plans $z = z_1$ et $z = z_2$ est constant, d'après l'équation de continuité. Ce volume est égal à

$$(z_1 - z_2)\, d\omega.$$

z_1 et z_2 restent constants, puisque la vitesse est toujours parallèle au plan des xy, donc $d\omega$ est constant.

Différentions l'équation (9) par rapport à t, il viendra donc :

$$\frac{dJ}{dt} = 2\int \frac{d\zeta}{dt} d\omega. \tag{12}$$

Comparons ces deux expressions de $\frac{dJ}{dt}$: comme les intégrales sont étendues à la même aire, il faut que

$$\frac{d\zeta}{dt} = K\Delta\zeta. \tag{13}$$

La dérivée $\frac{d\zeta}{dt}$ est calculée avec les variables de Lagrange, c'est-à-dire en suivant une molécule dans son mouvement.

Cette équation (13) est analogue à celle qui représente la propagation de la chaleur par conductibilité. Seulement, dans ce dernier problème, on regarde d'ordinaire les molécules comme immobiles. Ici au contraire ζ varie comme varierait la température du liquide, s'il possédait le même mouvement,

et que k fût son coefficient de conductibilité ; mais il se produirait aussi, dans ces conditions, un transport de chaleur par convection.

154. Extension des théorèmes généraux. — Nous avons démontré (nos **65** et suiv., **113** et suiv.) quelques théorèmes applicables aux liquides dans lesquels il ne se produit pas de frottement ; quelques-uns seront encore vrais.

Soit, en effet, un liquide indéfini dans lequel les tubes tourbillonnaires sont des cylindres parallèles à Oz.

Nous avons vu [**126**] que, en considérant ζ comme la densité d'une matière attirante répandue sur le plan des xy, la masse totale $M = \int \zeta d\omega$ de cette matière fictive est constante (l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\omega$ du plan des xy).

La masse ainsi définie est encore constante quand le liquide éprouve des frottements.

En effet, différentions :

$$M = \int \zeta d\omega$$

par rapport au temps, en remarquant que $d\omega$ est constant ; il vient :

$$\frac{dM}{dt} = \int \frac{d\zeta}{dt} d\omega = K \int \Delta\zeta d\omega. \tag{14}$$

Je dis que cette intégrale est nulle. Pour le démontrer, appliquons la formule de Green :

$$\int \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn} \right) ds = \int (u\Delta v - v\Delta u)\, d\omega$$

à un cercle de rayon très grand, en supposant que les fonctions u et v ou l'une d'elles s'annulent à l'infini ; l'intégrale du premier membre est nulle, et il reste :

$$\int u\Delta v d\omega = \int v\Delta u d\omega.$$

Faisons maintenant

$$u = 1 \qquad v = \zeta,$$

et nous trouverons :

$$\int \Delta\zeta d\omega = 0. \tag{15}$$

Donc

$$M = \text{const.}$$

155. Le centre de gravité de ces masses fictives est fixe, même quand il y a frottement.

En effet, les coordonnées de ce centre de gravité sont définies par les équations :

$$Mx_0 = \int \zeta x d\omega$$

$$My_0 = \int \zeta y d\omega.$$

Différentions la première par rapport à t, il vient :

$$M\frac{dx_0}{dt} = \int \zeta u d\omega + \int \frac{d\zeta}{dt} x d\omega,$$

puisque $d\omega$ est constant. La première intégrale est nulle, car l'existence du frottement influe seulement sur la valeur des dérivées de u et de v, non sur les valeurs elles-mêmes de ces

fonctions. Il reste donc :

$$M \frac{dx_0}{dt} = \int \frac{d\zeta}{dt} x d\omega = K \int \Delta\zeta x d\omega.$$

Appliquons encore le théorème de Green en faisant :

$$u = x \qquad v = \zeta;$$

x étant du premier degré, Δx est nul.

Par conséquent :

$$(16) \qquad \int x.\Delta\zeta d\omega = \int \zeta \Delta x d\omega = 0.$$

D'où $\frac{dx_0}{dt} = 0$, et x_0 est une constante.

Le même raisonnement conduit à la même conclusion pour y_0.

156. Le moment d'inertie I des masses fictives par rapport à un axe parallèle à Oz est constant, quand il n'existe pas de frottement. Mais, quand il existe des frottements, ce même moment varie proportionnellement au temps.

En effet :

$$I = \int \zeta(x^2 + y^2)\, d\omega$$

et

$$\frac{dI}{dt} = \int 2\zeta\,(xu + yv)\, d\omega + \int \frac{d\zeta}{dt}\,(x^2 + y^2)\, d\omega.$$

La première intégrale est nulle, comme s'il n'y avait pas de frottement, puisque la présence du frottement n'affecte pas les valeurs de u et de v. En tenant compte de l'équation (12),

on a :

$$\frac{dI}{dt} = \int \frac{d\zeta}{dt}(x^2 + y^2)\,d\omega = K\int \Delta\zeta\,(x^2 + y^2)\,d\omega.$$

Le théorème de Green pour $u = x^2 + y^2$, $v = \zeta$ donne :

$$\int (x^2 + y^2)\,\Delta\zeta d\omega = \int \zeta\Delta(x^2 + y^2)\,d\omega,$$

soit en remarquant que :

$$\Delta\,(x^2 + y^2) = 4,$$

$$\int (x^2 + y^2)\,\Delta\zeta d\omega = 4\int \zeta d\omega = 4M,$$

et enfin :

$$(17) \qquad \frac{dI}{dt} = 4KM.$$

La dérivée $\frac{dI}{dt}$ est constante et par suite I varie proportionnellement au temps ; il serait aisé d'ailleurs de calculer la rapidité de cette variation.

157. Application à un cas simple. — Supposons qu'à l'origine ζ dépende seulement de la distance à l'axe des z, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Par raison de symétrie, cette condition subsistera toujours. La vitesse en un point sera perpendiculaire au rayon vecteur abaissé du point perpendiculairement à l'axe Oz. Le point décrit une circonférence ayant son centre sur l'axe Oz et située dans un plan perpendiculaire à cet axe. A cause de la symétrie, le point restera sur cette circonférence, même s'il y a frottement ; mais, dans ce dernier cas, la vitesse cessera

d'être uniforme. En effet ζ est une fonction de r et de t. Donc :

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\zeta}{\partial r}\frac{dr}{dt}.$$

Mais puisque $r =$ const, $\frac{dr}{dt}$ est nul, et on a simplement :

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \mathrm{K}\Delta\zeta\,;$$

ou, d'après une formule bien connue, puisque ζ ne dépend que de r:

$$(18) \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \mathrm{K}\left(\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr}\right).$$

Il s'agit d'intégrer cette équation différentielle.

Considérons l'intégrale :

$$\mathrm{Z} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{h}}\,\mathrm{F}\,(x + \alpha\sqrt{t})\,d\alpha,$$

h étant une constante. Nous aurons :

$$\frac{d\mathrm{Z}}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{h}}\,\mathrm{F}'\,\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\,d\alpha.$$

Intégrons par parties :

$$\frac{d\mathrm{Z}}{dt} = \left[e^{-\frac{\alpha^2}{h}}\left(-\frac{h}{2}\right)\frac{\mathrm{F}'}{\sqrt{t}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{h}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{h}}\,\mathrm{F}''d\alpha.$$

Le terme intégré étant nul aux deux limites, cette expression se réduit à :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{h}}\,\mathrm{F}''d\alpha.$$

D'autre part :

$$\frac{d^2Z}{dx^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{h}} F'' d\alpha,$$

donc :

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{h}{4}\frac{d^2Z}{dx^2}.$$

D'une manière un peu plus générale, considérons l'intégrale :

$$Z = \int\int e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{h}} F(x + \alpha\sqrt{\tau}, y + \alpha\sqrt{\tau'})\, d\alpha d\beta.$$

Si, pour un instant, nous regardons y et τ' comme des constantes, Z est fonction seulement de x et de τ, et d'après ce qui précède :

$$\frac{dZ}{d\tau} = \frac{h}{4}\frac{d^2Z}{dx^2}.$$

Si de même nous regardons x et τ comme des constantes :

$$\frac{dZ}{d\tau'} = \frac{h}{4}\frac{d^2Z}{dy^2}.$$

D'autre part, nous avons :

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dZ}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} + \frac{dZ}{d\tau'}\frac{d\tau'}{dt} = \frac{dZ}{d\tau} + \frac{dZ}{d\tau'},$$

ou :

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{h}{4}\Delta Z.$$

Il nous suffit, pour identifier cette équation avec l'équation (**12**), de poser :

$$h = 4K,$$

K étant essentiellement positif.

En prenant ensuite

$$\zeta = Z,$$

nous pourrons calculer ζ à un instant quelconque.

Pour choisir la fonction F, il faut connaître la valeur de ζ à l'origine du temps, car pour $t = 0$

$$\zeta_0 = \iint e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{h}} F(x, y)\, d\alpha d\beta = F(x, y) \iint e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{h}} d\alpha d\beta.$$

Or :

$$\iint e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{h}} d\alpha d\beta = \frac{\pi}{4},$$

et par conséquent

$$\zeta_0 = \frac{\pi}{4} F(x, y)$$

équation qui détermine F.

Si la valeur initiale de ζ ne dépend que de r, F ne dépendra non plus que de r, et il sera possible de déterminer ζ à une époque quelconque, si rien ne vient déranger la symétrie, ou si les conditions de stabilité sont remplies.

158. Théorème de Helmholtz dans le mouvement relatif. — Le théorème de Helmholtz exprime que l'intégrale

$$J = \int u dx + v dy + w dz$$

est constante quand il y a une fonction des forces. Dans le cas du mouvement relatif, il n'y a plus de fonction des forces : le

théorème n'est plus vrai. On a :

$$\frac{dJ}{dt} = \int d\psi + dT$$

avec

$$d\psi = dV - \frac{dp}{\rho},$$

quand il existe un potentiel V.

S'il n'existe plus de potentiel

$$d\psi = Xdx + Ydy + Zdz - \frac{dp}{\rho}.$$

Si le mouvement d'entraînement est par exemple une rotation autour de l'axe terrestre avec une vitesse angulaire ω_0, on aura :

$$Xdx + Ydy + Zdz = dV + 2\omega_0 (vdx - udy)$$

d'après le théorème de Coriolis, en comprenant dans le potentiel V la force centrifuge ordinaire, l'axe des z étant l'axe de rotation. Il vient alors :

$$\frac{dJ}{dt} = \int (dV + dT) + \int 2\omega_0 (vdx - udy).$$

La première intégrale est nulle, et il reste :

$$\frac{dJ}{dt} = 2\omega_0 \int (vdx - udy).$$

Soit C la courbe d'intégration ; projetons-la sur le plan des xy ; soit A l'aire limitée par cette projection (*fig.* 43), soient M et M′ deux points infiniment voisins : les projections de MM′ sur les trois axes sont dx, dy, dz. Au bout du temps dt,

les diverses molécules qui se trouvaient sur C viennent sur C′ et, en particulier, M vient en M_1 et M′ en M'_1. Les projections de MM_1 sont udt, vdt, wdt. Le quadrilatère $MM'M_1M'_1$ est assimilable à un parallélogramme dont la projection sur le plan des xy limite une aire égale à :

$$dt\,(vdx - udy).$$

Fig. 43.

L'intégrale

$$dt\int(vdx - udy)$$

représente donc la variation $\frac{dA}{dt}dt$ de l'aire A pendant le temps dt. Par conséquent :

$$\frac{dJ}{dt} = 2\omega_0\frac{dA}{dt}$$

et

$$J = 2\omega_0 A + \text{const},$$

et si J_0 et A_0 sont les valeurs initiales de J et de A, on aura :

$$J_0 = 2\omega_0 A_0 + \text{const}$$
$$J - J_0 = 2\omega_0\,(A - A_0).$$

Soit (*fig.* 44) un cercle de rayon r_0. Les molécules situées sur cette circonférence sont primitivement en équilibre relatif par rapport à la surface de la terre. Donc :

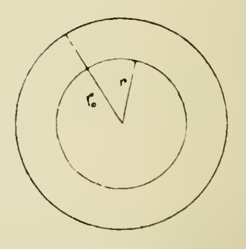


Fig. 44.

$$A_0 = \pi r_0^2 \sin\lambda,$$

λ étant la latitude et

$$J_0 = o.$$

S'il se produit une perturbation, un appel d'air vers le centre du cercle, les molécules viennent au bout d'un certain temps occuper une courbe fermée, assimilable à une circonférence de rayon r. Dans cette nouvelle position :

$$A = \pi r^2 \sin \lambda$$
$$J = 2\omega_0 \pi (r^2 - r_0^2) \sin \lambda.$$

Il se produira alors une rotation : soit ω la vitesse angulaire de cette rotation ou la composante verticale du tourbillon il viendra

$$J = 2\int \omega d\sigma,$$

$d\sigma$ étant un élément de surface, ou en supposant ω constant

$$J = 2\omega \int d\sigma = 2\omega\pi r^2.$$

Égalant les deux expressions de J, on trouve :

$$\omega = \omega_0 \sin \lambda \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right).$$

Si $\frac{r}{r_0}$ est assez petit, ω deviendra très grand et aura toujours le même signe, c'est-à-dire que la rotation sera toujours dirigée dans le même sens.

C'est là l'une des explications proposées pour la formation des cyclones atmosphériques.

FIN

TABLE DES MATIÈRES

Pages

CHAPITRE PREMIER

Théorème de Helmholtz

CHAPITRE II

Conséquences du théorème de Helmholtz

CHAPITRE III

Détermination des composantes de la vitesse en fonction des composantes du tourbillon. — Cas particulier des liquides.

CHAPITRE IV

Mouvement des tubes tourbillonnaires

CHAPITRE V

Cas de deux tubes tourbillonnaires. — Méthode des images

CHAPITRE VI

Méthode de la représentation conforme

CHAPITRE VII

Mouvements des tubes tourbillonnaires Théorèmes généraux. — Tubes de révolution

CHAPITRE VIII

Condition de stabilité du mouvement permanent

CHAPITRE IX

Fluides présentant une surface libre

CHAPITRE X

Influence de la viscosité des fluides

Tours. — Imprimerie Deslis Frères.

ERRATUM

Page 57. *Fig.* 17. Sur le contour pointillé lire au lieu de MNNP, MNPQ.